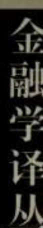
金融数学
金融工程引论

Mathematics for Finance
An Introduction to Financial Engineering

[美] 马雷克·凯宾斯基 Marek Capiński
托马什·扎斯特温尼克 Tomasz Zastawniak /著

中国人民大学出版社



金融学译丛



金融数学
金融工程引论

Mathematics for Finance
An Introduction to Financial Engineering

[美] 马雷克·凯宾斯基 Marek Capiński
托马什·扎斯特温尼克 Tomasz Zastawniak /著

郭多祚/校
佟孟华/译

梁晶工作室 LIANGJING PUBLISHING HOUSE

金融学译丛

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

金融数学：金融工程引论/（美）凯宾斯基，（美）扎斯特温尼克著；佟孟华译.
北京：中国人民大学出版社，2009
（金融学译丛）
ISBN 978-7-300-10161-3

Ⅰ. 金…
Ⅱ. ①凯…②扎…③佟…
Ⅲ. 金融一经济数学
Ⅳ. F830

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第204536号

金融学译丛
金融数学——金融工程引论
［美］马雷克·凯宾斯基
　　　托马什·扎斯特温尼克　著
郭多祚　校
佟孟华　译

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	河北涿州星河印刷有限公司		
规　　格	185mm×260mm 16开本	**版　　次**	2009年1月第1版
印　　张	18.5 插页3	**印　　次**	2009年1月第1次印刷
字　　数	345 000	**定　　价**	35.00元

《金融学译丛》总序

金融学的核心问题是研究资本和资产的配置效率。在市场经济中，这种配置主要是通过金融市场来进行的。广义的金融市场包括证券市场、货币市场、各种形式的银行、储蓄机构、投资基金、养老基金、保险市场等等。市场的参与者包括个人、企业、政府和各种金融机构，他们在资本市场中的交易形成了资本和资产的供求关系，并决定其价格。而价格又指导着资本和资产的供求及其最终配置。资本作为经济活动和经济发展中的关键因素，其配置效率从根本上决定着一个经济的发展过程和前景。因此，一个国家或经济的金融市场的发达程度明确地标志着它的经济发展水平。

中国正处在创建和发展自己的金融市场的关键时期。在谋求经济健康而快速发展的过程中，如何充分地吸引资本、促进投资，进而达到最有效的资本资产配置，无疑是成功的关键。因此，建立一个有效的、现代化的金融体系是我们的当务之急。中国经济进一步开放和国际金融市场全球化的大趋势更增加了这个任务的紧迫性。在这一点上，现代金融理论及其在西方的应用是我们亟须了解和掌握的。

《金融学译丛》旨在把西方金融学的理论和实践方面最新、最权威和最有代表性的著作介绍给大家。我们希望这个系列能够涉及金融的各个主要领域，理论和实践并重，专业和一般兼顾。在我们所选择的书目中，既有反映最高学术水平的专著，也有西方著名商学院视作经典的教材，还有华尔街通用的金融手册。内容包括金融和证券、资产定价、投资、公司财务、风险管理和国际金融等等。但愿我们这个系列能为读者打开现代金融学知识、理论和技术宝库之窗，使它们成为发展中国金融市场的有力工具。

《金融学译丛》推荐委员会

2000 年 10 月

前 言

本书是一本绝佳的金融投资参考书，以整部书的篇幅论述了两个获得诺贝尔经济学奖的理论，涉及的领域广泛，包含很多好的方法。有多少大学本科教科书敢于这样声称?

在债券和股票价格数学模型的基础上，这两个理论始于两个不同的方向：一个是布莱克-斯科尔斯（Black-Scholes）的期权和其他衍生证券的套利定价理论；另一个是马科维茨资产组合优化（Markowitz portfolio optimisation）和资本资产定价模型（Capital Asset Pricing Model)。基于无套利理论的模型还能进一步地研究利率的期限结构。这些都是数理金融的三个重要领域，它们对现代金融市场的运作方法产生了重大影响。本书适用于大学本科二年级或三年级学生，不限于数学专业，其他专业——例如企业管理、金融学、经济学专业也同样适用。

本书内容为一年的课程，大约 100 课时讲完。只选择书中某些课题的课时较少的教师，可以自己选择合适的章节设计。书中穿插了大量的例子和练习，练习全部都有解答，并提供了大量的材料作为辅助教程，使得本书非常适于教学。

学习本书的前提包括初等微积分、概率论和线性代数。在微积分方面，要求熟练掌握导数和偏导数，能够计算单变量和多变量函数的最大值和最小值、拉格朗日乘数、泰勒公式和积分。在概率论方面，要求掌握随机变量及其概率分布，尤其是二项分布和正态分布，还有期望、方差、条件概率和独立性。熟悉中心极限定理对学习本书很有用。对于线

性代数，要求读者会求解线性方程组，掌握矩阵的加法、乘法、数量运算，能够计算逆矩阵和行列式。特别地，关于概率论的参考书，我们推荐我们自己撰写的书：M. Capiński and T. Zastawniak，*Probability Through Problems*，Springer-Verlag，New York 2001.

在大量的数值例子和练习中，使用装有电子表格软件的计算机会有很大帮助，但这并不是完全必要的，在下面给出的网页中，我们提供了一些 Excel 文件，其中包括一些例子与练习的解答。

我们非常感谢奈杰尔·卡特兰德（Nigel Cutland）的提醒，使我们避免了其他一些教科书中经常会出现的错误，我们将在注 4.1 中进一步说明。我们也非常感谢我们的学生和同事对初始版本各章提出的反馈意见。我们还要感谢本书前两版的读者，尤其是安杰伊·帕尔切维斯基(Andrzej Palczewski)，他提出了许多改进意见，指出了一些错误，这些错误已经在这次印刷中纠正。

热情地邀请本书读者访问网页（www.springeronline.com/1-85233-330-8）和点击相关的网站，查看最新的下载和更正，或者与作者交流，我们将对您提出的意见表示深深的感谢。

马雷克·凯宾斯基和托马什·扎斯特温尼克

2004 年 7 月

目 录

第 1 章　引论：简单市场模型

1.1　基本概念和假设

1

假设有两种可交易资产：一种是无风险资产；一种是风险证券。无风险资产指银行存款或是由政府、金融机构、公司发行的债券。风险证券的典型代表是股票，风险证券还可能是外币、黄金、商品，或未来的价格今天为未知的任何虚拟资产。

我们在引论中限定时间仅有两个时刻：今天，即 $t=0$；未来的某个时间，比如说一年以后，即 $t=1$。更精确和更符合实际的情况我们将在后面的各章研究。

风险证券的**头寸**（position）是指一个投资者持有的股票份额。1 股在时间 t 的价格用 $S(t)$ 表示。当前的股票价格 $S(0)$ 是已知的，但未来的价格 $S(1)$ 是未知的：可能上涨，也可能下跌。差额 $S(1)-S(0)$ 与初始价格的比即所谓的收益率，或者简称为收益，可以表示为

$$K_S=\frac{S(1)-S(0)}{S(0)}$$

它也是具有不确定性的。我们将在第 3 章中论述股票的动态价格。

无风险资产的头寸是指在银行账户中的金额。投资者可选择继续把

钱存在银行，也可选择投资债券。我们用 $A(t)$ 表示债券在时间 t 的价格。与当前的股票价格一样，债券的当前价格 $A(0)$ 是已知的。但是，与股票不同，债券在时间 1 的价格 $A(1)$ 也是已知的，具有确定性。例如，$A(1)$ 是由发行债券的机构确保的支付，在这种情况下，我们说债券到期时的面值为 $A(1)$。用与股票同样的方法定义债券的收益率为

$$K_A=\frac{A(1)-A(0)}{A(0)}$$

我们将在第 2 章、第 10～11 章中详细地研究无风险资产。

我们的任务是构建金融证券市场的数学模型。关键的第一步与涉及的数学对象的特性相关。下面我们将设定一些假设，其目的是寻求现实世界的复杂性与数学模型的简化性和局限性之间的一种妥协，附加这些假设是为了模型更容易处理。这些假设反映了现在的妥协情形，但将来会被修改。

假设 1.1（随机性（Randomness））

未来的股票价格 $S(1)$ 是**随机变量**，它至少取两个不同的值。无风险证券的未来价格 $A(1)$ 是已知数。

假设 1.2（价格的正性）

所有股票和债券的价格是严格正的，即

$$A(t)>0,\ S(t)>0 \quad t=0,1$$

持有 x 股股票和 y 份债券的投资者在时间 $t=0$，1 时的总财富为

$$V(t)=xS(t)+yA(t)$$

数对 (x, y) 被称为**资产组合**（portfolio）；$V(t)$ 为这个资产组合的**价值**，换言之，$V(t)$ 是投资者在时间 t 的**财富**。

资产价格在时间 0～1 的增长决定着资产组合的价值变化，即

$$V(1)-V(0)=x(S(1)-S(0))+y(A(1)-A(0))$$

这个差额（可以是正的、零或负的）与初始价值的比为资产组合的收益率，即

$$K_V=\frac{V(1)-V(0)}{V(0)}$$

股票或债券的收益率是资产组合收益率的特殊情况（分别为 $x=0$ 或 $y=0$）。注意，因为 $S(1)$ 为随机变量，于是 $V(1)$ 及相应的 K_S 和 K_V 都是随机变量。无风险资产的投资收益 K_A 是确定性的。

例 1.1

假设 $A(0)=100$ 美元；$A(1)=110$ 美元，则债券投资的收益率为

$$K_A=0.10$$

即 10%。另外，假设 $S(0)=50$ 美元，且随机变量 $S(1)$ 取两个值，即

$$S(1)=\begin{cases}52 & \text{概率为 } p\\ 48 & \text{概率为 } 1-p\end{cases}$$

对某一个 $0<p<1$，则股票的收益率为

$$K_S=\begin{cases}0.04 & \text{如果股票上涨}\\ -0.04 & \text{如果股票下跌}\end{cases}$$

即 4%或者−4%。

例 1.2

假设债券价格和股票价格与例 1.1 相同，则由 $x=20$ 股股票，$y=10$ 份债券构成的资产组合在时间 0 的价值（单位：美元）为

$$V(0)=2\ 000$$

该资产组合在时间 1 的价值为

$$V(1)=\begin{cases}2\ 140 & \text{如果股票上涨}\\ 2\ 060 & \text{如果股票下跌}\end{cases}$$

于是这个资产组合的收益率为

$$K_V=\begin{cases}0.07 & \text{如果股票上涨}\\ 0.03 & \text{如果股票下跌}\end{cases}$$

即 7%或者 3%。

4

练习 1.1

假设 $A(0)=90$ 美元；$A(1)=100$ 美元；$S(0)=25$ 美元，并且假设

$$S(1)=\begin{cases}30 & \text{概率为 } p\\ 20 & \text{概率为 } 1-p\end{cases}$$

式中，$0<p<1$。资产组合由 $x=10$ 股股票，$y=15$ 份债券构成，计算 $V(0)$，$V(1)$ 和 K_V。

练习 1.2

假设股票价格和债券价格与练习 1.1 相同，计算在时间 1 的价

值为

$$V(1)=\begin{cases}1\,160 & \text{如果股票上涨}\\ 1\,040 & \text{如果股票下跌}\end{cases}$$

的资产组合。这个资产组合在时间 0 的价值是多少？

尽管与实际情况相差甚远，但为了数学上的方便，我们允许资产组合中的风险资产的数量 x 和无风险资产的数量 y 为任意实数，包括负数和分数。这种想法反映在如下的假设中，这个假设对涉及的交易头寸没有附加任何限制。

假设 1.3（可分性、流动性和卖空）

一个投资者持有的股票数量 x 和债券数量 y 可以是任何数，即可以是整数、分数、正数、负数或者是零。一般说来，

$$x, y\in\mathbb{R}$$

可分性指的是投资者持有的股票数量和债券数量可以是分数。当交易量与单位价格相比很大时，我们可以认为在现实世界的交易达到了几乎完美的可分性。

对 x 和 y 的数量不加任何限制与另一个市场特征即**流动性**有关。这意味着，根据需求，任何资产都可以按照市场价格进行任意数量的买或者卖。这显然是数学上的理想化，因为实际上对交易量是有限制的。

如果在资产组合中持有的某种证券的数量是正的，我们就说投资者拥有**多头头寸**。否则，为**空头头寸**，或者**卖空资产**。无风险证券的空头头寸可能涉及发行和出售债券，但实际上，通过借入现金更容易达到同样的融资效果。利率由债券的价格决定。偿还贷款及利息可以认为是**终止**空头。股票的空头头寸可以通过**卖空**来实现。这意味着投资者可以借入股票后卖出，利用得到的收益进行其他的投资。股票的所有者仍对股票拥有所有的权利，特别是有得到红利和在任何时刻卖出股票的权利。因此，投资者必须有足够的财力来履行合约，特别是能够通过回购股票并归还给股票的所有人以结清风险资产的空头头寸。类似地，投资者总可以利用归还贷款和利息来结清无风险证券的空头头寸，基于此，我们附加了如下限制。

5

假设 1.4（偿付能力）

投资者的财富始终是非负的，即

$$V(t)\geqslant 0\quad t=0,1$$

满足上述条件的资产组合被称为是可允许的。

在现实世界中，可能的不同价格的数量是有限的。一方面，因为这些价格是特定的十进位数字；另一方面，因为在整个世界中最终的货币数量是确定的，这提供了一个所有价格的上限。

假设 1.5（离散单位价格）

股票的未来价格 $S(1)$ 为只取有限多个值的随机变量。

1.2 无套利原则

在本节中我们将继续叙述市场的最基本假设，简单地说，我们将假设市场不允许没有初始投资的无风险利润。

例如，当市场的参与者出现错误时，可能会出现没有初始投资的无风险利润。假设纽约的交易商 A 以 $d_A=1.62$ 美元兑换 1 英镑的汇率购买英镑，而交易商 B 在伦敦以 $d_B=1.60$ 美元兑换 1 英镑的汇率卖出英镑。如果是这种情况，实际上，交易商就是在分发意外之财了。一个没有任何初始投资的投资者可获得 $d_A-d_B=0.02$ 美元的利润，其方法是，同时取得交易商 B 的空头头寸和交易商 A 的多头头寸。投资者的获利需求将迫使交易商调整汇率使得这个可以获得财富的机会消失。

6

练习 1.3

2002 年 7 月 19 日，纽约的交易商 A 和伦敦的交易商 B 利用如下汇率交易欧元、英镑和美元：

交易商 A	买入	卖出
1.000 0 欧元	1.020 2 美元	1.028 4 美元
1.000 0 英镑	1.571 8 美元	1.584 4 美元

交易商 B	买入	卖出
1.000 0 欧元	0.632 4 英镑	0.640 1 英镑
1.000 0 美元	0.629 9 英镑	0.637 5 英镑

指出没有任何初始投资的投资者获取无风险利润的机会。

下面的例子说明了在单期简单框架下没有任何初始投资的投资者获取无风险利润的情况。

例 1.3

假设纽约的交易商 A 一年以后以汇率 $d_A=1.58$ 美元兑换 1 英镑购买

英镑，在伦敦的交易商 B 同时以汇率 $d_B = 1.60$ 美元兑换 1 英镑卖出英镑；进一步假设美元可以按年利率 4%借入，英镑可在银行账户以 6%利率投资，这样也能制造没有任何初始投资的投资者获得无风险利润的机会，只是不如前面的例子那么明显。

例如，一个投资者借入 10 000 美元并能换成 6 250 英镑，然后存入一个银行账户中。一年以后，获得 375 英镑的利息，总金额将会变为 10 467.50 美元（根据年初与交易商 A 签订的协议）。归还贷款以及 400 美元利息之后，投资者将得到 67.50 美元的利润。

7

显然，一些交易商的汇率报价会发生错误，这可能会被投资者利用，要求交易商重新调整汇率，减少 d_A 或者增加 d_B 以使得利润消失。

我们将作一个假设，避免类似上面例子的情况出现。

假设 1.6（无套利原则）

不存在初始价值 $V(0)=0$ 的可允许的资产组合使得 $V(1)>0$ 具有非零概率。

换言之，如果一个可允许的资产组合初始价值为零，即 $V(0)=0$，那么 $V(1)=0$ 的概率为 1。这意味着，没有投资者获得无风险利润，而且没有初始禀赋。如果违背了这个原则的资产组合存在，则可以得到套利机会。

套利机会在实际操作中很少存在。如果打算利用套利机会，由于收益与交易量相比非常小，小投资者很难获利。另外，套利机会与上面的例子相比，更难把握。违背无套利原则的情况一般是短暂且难以把握的。活跃的投资者（称为套利者）追逐套利利润的积极性将有效地消除套利机会。

在数学模型中，排除套利十分贴近实际，这是最重要和最有效的假设。基于无套利原则的论证是金融数学的主要工具。

1.3 单期二叉树模型

在本节中，我们只考虑非常简单的例子。在这个例子中，股票价格 $S(1)$ 仅取两个不同的值，尽管非常简单，但这种情形对以后理论的发展具有特殊意义。

8

例 1.4

假设 $S(0)=100$ 美元，$S(1)$ 可以取两个值，即

$$S(1)=\begin{cases}125 & \text{概率为 } p\\ 105 & \text{概率为 } 1-p\end{cases}$$

式中，$0<p<1$；$A(0)=100$ 美元；$A(1)=110$ 美元。因此，如果股票上涨，则股票收益率 $K_S=25\%$；如果股票下跌，则 $K_S=5\%$。（观察在时间 1 股票的两个价格，碰巧比在时间 0 的价格高；上涨和下跌是相对于时间 1 的价格而言的）。无风险资产的收益率 $K_A=10\%$，股票价格如图 1—1 所示。

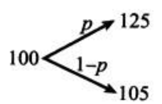


图 1—1　股票价格的单期二叉树

一般说来，在二叉树模型中，是按照无套利原则选择股票价格和债券价格。假设在时间 1 上涨和下跌的可能的股票价格为

$$S(1)=\begin{cases}S^{u} & \text{概率为 } p\\ S^{d} & \text{概率为 } 1-p\end{cases}$$

式中，$S^{d}<S^{u}$；$0<p<1$。

命题 1.1

如果 $S(0)=A(0)$，则

$$S^{d}<A(1)<S^{u}$$

否则，将出现套利机会。

证明

为简单起见，我们假设 $S(0)=A(0)=100$ 美元；$A(1)\leqslant S^{d}$。在这种情况下，在时间 0：

- 借入无风险资产 100 美元。
- 用 100 美元买入 1 股股票。

9 用这种方法，你将持有资产组合 (x, y)，其股票股数 $x=1$，债券数 $y=-1$，于是，在时间 0，这个资产组合的价值为

$$V(0)=0$$

在时间 1，该资产组合的价值变为

$$V(1)=\begin{cases}S^{u}-A(1) & \text{如果股票上涨}\\ S^{d}-A(1) & \text{如果股票下跌}\end{cases}$$

如果 $A(1)\leqslant S^{d}$，则这两个可能价值的第一个严格为正，而另一个为非负，即 $V(1)$ 是非负的随机变量，且满足 $V(1)>0$ 的概率为 $p>0$，这个

资产组合提供了一个套利机会，违背无套利原则。

现在假设 $A(1)\geqslant S^u$，如果是这种情况，则在时间 0：

- 卖空 1 股得到 100 美元。
- 投资 100 美元于无风险资产。

其结果是，你将持有一个资产组合（x，y），其中 $x=-1$，$y=1$，其初始价值仍为零，即

$$V(0)=0$$

这个投资组合的最终价值为

$$V(1)=\begin{cases}-S^u+A(1) & \text{如果股票上涨}\\ -S^d+A(1) & \text{如果股票下跌}\end{cases}$$

因为 $S^u\leqslant A(1)$，$V(1)$ 是非负的，其中第二个值严格为正，即 $V(1)$ 是非负的随机变量，满足 $V(1)>0$ 的概率为 $1-p>0$，再一次出现套利机会，违背无套利原则。 □

隐含在以上论证中的一般意义的推理是简单易懂的，即买价格低的资产，卖价格高的资产来赚取价差。

1.4 风险和收益

与前面一样，我们假设 $A(0)=100$ 美元；$A(1)=110$ 美元；$S(0)=80$ 美元，并且

$$S(1)=\begin{cases}100 & \text{概率为 } 0.8\\ 60 & \text{概率为 } 0.2\end{cases}$$

10

假设你有 10 000 美元用于资产组合投资。你决定买 $x=50$ 股股票，在无风险资产上的投资为 $y=60$，那么

$$V(1)=\begin{cases}11\,600 & \text{如果股票上涨}\\ 9\,600 & \text{如果股票下跌}\end{cases}$$

$$K_V=\begin{cases}0.16 & \text{如果股票上涨}\\ -0.04 & \text{如果股票下跌}\end{cases}$$

期望收益（expected return），即资产组合收益率的数学期望

$$E(K_V)=0.16\times0.8-0.04\times0.2=0.12$$

即 12%。我们将投资**风险**定义为随机变量 K_V 的标准差，有

$$\sigma_V = \sqrt{(0.16-0.12)^2 \times 0.8 + (-0.04-0.12)^2 \times 0.2} = 0.08$$

即 8%。让我们将此与单一类型的证券投资进行比较。

如果 $x=0$，则 $y=100$，即完全投资于无风险资产。在这种情况下，收益率是确定的已知数 $K_A=0.1$，即 10%，由标准差测量的风险为零，即$\sigma_A=0$。

另一方面，如果 $x=125$，$y=0$，则完全投资于股票，于是有

$$V(1) = \begin{cases} 12\ 500 & \text{如果股票上涨} \\ 7\ 500 & \text{如果股票下跌} \end{cases}$$

且 $E(K_S)=0.15$，$\sigma_S=0.20$，即分别为 15%和 20%。

如果针对两个期望收益相同的资产组合进行选择，显然，任何投资者都会选择风险更低的。类似地，如果风险水平相同，任何投资者都会选择收益更高的，在这种情况下，高收益与高风险相联系。此时，选择取决于个人的偏好。这些问题我们将在第 5 章讨论。在第 5 章中，我们还将论述由多个风险证券组成的资产组合，阐述在保持预期收益的同时减少风险的资产组合选择和分散化的作用。

练习 1.4

股票和债券的价格如上，将初始财富 10 000 美元按股票和债券各半设计资产组合，计算期望收益和用标准差测量的风险。

1.5 远期合约

11

远期合约是在未来指定的时间以现在确定的固定价格购买或者卖出风险资产的协议，指定的时间称为**交割日**（delivery date），固定的价格 F 称为**远期价格**（forward price）。将打算购买资产的投资者称为远期合约多头，或称持有远期合约多头头寸。将打算卖出资产的投资者称为远期合约空头，或称持有远期合约空头头寸。在远期合约交易时，没有现金支付。

例 1.5

假设远期价格为 80 美元。如果在交割日，资产的市场价格为 84 美元，那么远期合约多头头寸的持有者以 80 美元的价格购买资产，立刻以 84 美元卖出，就可以获得 4 美元差价。另一方面，持有远期合约空头头寸的投资者，将以 80 美元卖出资产，损失 4 美元。但是，在交割日，如果资产的市场价格是 75 美元，那么，持有远期合约多头头寸的投资者以

80 美元购买该资产，损失 5 美元。同时，持有远期合约空头头寸的投资者以 80 美元卖出资产，高出市场价格 75 美元，赚得 5 美元。这两种情况为一个投资者损失而另一个投资者获利的情形。

一般来说，如果资产的未来价格 $S(1)$ 上升，而且高于远期价格 F，那么以时间 1 为交割日的持有远期合约多头头寸的投资者将受益。如果资产的未来价格 $S(1)$ 下跌到远期价格 F 以下，那么远期合约多头头寸的持有者将遭受损失。一般地，远期合约多头头寸的**回报**（payoff）为 $S(1)-F$（它可以为正、为负或为零）。远期合约空头头寸的回报为 $F-S(1)$。

除了股票和债券之外，一个投资者持有的资产组合可以包含远期合约，此时我们用三元组（x，y，z）表示资产组合，和以前一样，用 x 和 y 表示股票和债券的数量，z 为远期合约的数量（多头为正，空头为负）。因为远期合约交易时没有现金支付，所以这样的资产组合的初始值可以简化为

$$V(0)=xS(0)+yA(0)$$

在交割日，投资组合的价值为

$$V(1)=xS(1)+yA(1)+z(S(1)-F)$$

12 假设 1.1～1.5 以及无套利原则实际上已经扩展到这种情况。

远期价格 F 由无套利原则确定。特别地，很容易发现没有**持有成本**（carrying cost）的资产。这种资产的典型例子为不支付红利的股票。（相反，商品通常包括储存成本；而持有外币可以获得利息，可以认为是负的持有成本。）

远期头寸保证在交割日以远期价格卖出资产。资产可以现在卖出，也可持有到交割日。而如果初始现金支出为零，则必须贷款融资购买，在交割日需要归还的贷款及利息为远期价格。下面的命题说明，确实如此。

命题 1.2

假设 $A(0)=100$ 美元；$A(1)=110$ 美元；$S(0)=50$ 美元；风险证券没有持有成本，则有远期价格 $F=55$ 美元，否则，就存在套利机会。

证明

假设 $F>55$ 美元。那么在时间 0：

- 借入 50 美元。
- 以 $S(0)=50$ 美元的价格买入该资产。
- 以远期价格 F 购进远期合约空头，交割日为时间 1。

其结果是资产组合 $(1, -\frac{1}{2}, -1)$ 由股票、无风险头寸和远期合约空头头寸构成，初始价格为 $V(0)=0$，那么在时间 1：

- 终止远期合约空头头寸，以 F 美元的价格卖出资产。
- 终止无风险资产头寸，支付 $\frac{1}{2}\times 110=55$ 美元。

则投资组合的终值 $V(1)=F-55>0$ 将是你的套利利润，违背无套利原则。

另一方面，如果 $F<55$ 美元，则在时间 0：

- 以 50 美元的价格卖空资产。
- 将这个金额投资于无风险资产。
- 取得股票的远期合约多头头寸，远期价格为 F 美元，交割日为时间 1。

这个资产组合 $(-1, \frac{1}{2}, 1)$ 的初始值 $V(0)=0$，而在时间 1：

13

- 来自无风险投资的现金是 55 美元。
- 以 F 美元买资产，结清远期合约多头头寸，将资产返还给所有者。

那么，你的套利利润 $V(1)=55-F>0$，这再一次违背了无套利原则，得出远期价格必须是 $F=55$ 美元。 □

练习 1.5

假设 $A(0)=100$ 美元；$A(1)=112$ 美元；$S(0)=34$ 美元。如果股票远期价格 $F=38.60$ 美元，交割日为时间 1，能找到套利机会吗？

练习 1.6

假设 $A(0)=100$ 美元；$A(1)=105$ 美元；英镑现在的价格 $S(0)=1.6$ 美元；英镑远期价格为 $F=1.5$ 美元；交割日为时间 1。如果约定在时间 1 支付 100 英镑，今天英镑债券的成本会是多少？提示：基于资产的远期合约包括负的持有成本（投资于英镑债券得到的利息收益）。

1.6 看涨期权和看跌期权

假设 $A(0)=100$ 美元；$A(1)=110$ 美元；$S(0)=100$ 美元，且

$$S(1)=\begin{cases}120 & \text{概率为 } p\\ 80 & \text{概率为 } 1-p\end{cases}$$

式中，$0<p<1$。

看涨期权（其**敲定价**或者**施权价**为 100 美元，施权时间为 1）是一个合约，这个合约赋予持有者在时间 1 以 100 美元价格购买 1 股股票的权利（而不是义务）。

如果股票价格下跌到施权价以下，则期权没有价值。如果股票的市场价为 80 美元，以 100 美元的价格购买 1 股是没有意义的，也没有投资者会行使这个权利。相反，如果股票上涨到 120 美元，高于施权价，期权将会给持有者带来 20 美元的利润，他可以在时间 1 以 100 美元价格购买 1 股股票，并立刻以 120 美元的价格卖出。这就是行使期权，即利用股票市场价和施权价之间的差价 20 美元，期权简单地施权。实际上，这是经常采用的方法，因为不需要股票换手。

14

因此，看涨期权的回报，即它在时间 1 的价值为随机变量

$$C(1)=\begin{cases}20 & \text{如果股价上涨}\\ 0 & \text{如果股价下跌}\end{cases}$$

而 $C(0)$ 表示期权在时间 0 的价值，即今天购买或者卖出期权的价格。

注 1.1

乍看起来，看涨期权类似于远期合约多头，两者都包含在未来某个时间，以预先固定的价格购买一种资产。一个本质的区别是，远期合约多头头寸的持有者承担以固定价格购买资产的义务，而看涨期权的持有者有权利但没有义务这样做。另一个差别是，投资者需要花钱购买看涨期权，而在远期合约交易时不需要任何支付。

在可以利用期权的市场，可以投资由 x 股股票、y 份债券、z 份期权构成的资产组合 (x, y, z)，在时间 0，该资产组合的价值为

$$V(0)=xS(0)+yA(0)+zC(0)$$

在时间 1，该资产组合的价值为

$$V(1)=xS(1)+yA(1)+zC(1)$$

恰似包含远期合约投资组合的情况。假设 1.1～1.5 以及无套利原则可以扩展到包含股票、债券和期权的资产组合。

我们的任务是，在符合市场假设的情况下，特别地，在没有套利机会的条件下，计算看涨期权在时间 0 的价格 $C(0)$。因为看涨期权的持有者有权利但没有义务，所以可以合理地认为 $C(0)$ 是正的：因为需要支付期权费以获得权利。期权价格 $C(0)$ 可以用如下两个步骤解出。

步骤 1

构造 x 股股票、y 份债券的投资，使得在时间 1，不论股票价格上涨

到 120 美元还是下跌到 80 美元，资产组合与期权具有同样的价值，即

$$xS(1)+yA(1)=C(1)$$

15 称其为**复制期权**。

步骤 2

计算时间 0 在股票和债券上的投资的价值，证明它必须等于期权的价格，即

$$xS(0)+yA(0)=C(0)$$

否则将存在套利机会，这个步骤被称为**期权定价**或者**估值**。

步骤 1（复制期权）

时间 1 在股票和债券上的投资的价值将是

$$xS(1)+yA(1)=\begin{cases}120x+110y & \text{如果股价上涨}\\ 80x+110y & \text{如果股价下跌}\end{cases}$$

因此，两个随机变量的等式 $xS(1)+yA(1)=C(1)$ 可以写为

$$\begin{cases}120x+110y=20\\ 80x+110y=0\end{cases}$$

第一个方程对应于股票上涨到 120 美元；第二个方程对应于股票下跌到 80 美元。因为我们想使得在股票和债券上的投资在时间 1 无论股票上涨和下跌都恰好等于期权的价值，因此这两个方程同时满足，解出 x 和 y，于是有

$$x=\frac{1}{2},\ y=-\frac{4}{11}$$

为复制期权，我们需要购买$\frac{1}{2}$股股票和取得远期合约空头头寸$-\frac{4}{11}$份债券（或者借入$\frac{4}{11}\times 100=\frac{400}{11}$美元现金）。

步骤 2（期权定价）

我们可以计算在股票和债券上的投资在时间 0 的价值，即

$$xS(0)+yA(0)=\frac{1}{2}\times 110-\frac{4}{11}\times 100\cong 13.6364\text{（美元）}$$

下面的命题证明它必须等于期权的价格。

命题 1.3

如果期权可以被上面的投资于股票和债券的资产组合复制，那么，$C(0)=\frac{1}{2}S(0)-\frac{4}{11}A(0)$，否则，存在套利机会。

证明

16

假设$C(0)+\frac{4}{11}A(0)>\frac{1}{2}S(0)$，如果是这种情况，那么在时间 0：

- 以 $C(0)$美元价格卖出 1 份期权。

- 借入$\frac{4}{11}\times 100=\frac{400}{11}$美元现金（或利用卖出债券取得 $y=-\frac{4}{11}$债券空头头寸）。

- 支付 $xS(0)=\frac{1}{2}\times 100=50$ 美元购买 $x=\frac{1}{2}$股股票。

该交易的现金余额是正的，即 $C(0)+\frac{4}{11}A(0)-\frac{1}{2}S(0)>0$，将此金额进行无风险投资。随后，在时间 1：

- 如果股票上涨，则结算期权，支付市场价和施权价之差 20 美元；如果股票下跌，没有任何支付。成本将是 $C(1)$，包含两种可能性。

- 归还贷款和利息（终止债券的空头头寸 $y=-\frac{4}{11}$），这个成本将是$\frac{4}{11}\times 110=40$ 美元。

- 卖出$\frac{1}{2}S(1)$ 股股票，如果股票上涨得到$\frac{1}{2}\times 120=60$ 美元；如果股票下跌得到$\frac{1}{2}\times 80=40$ 美元。

这些交易的现金余额是零，即$-C(1)+\frac{1}{2}S(1)-\frac{4}{11}A(1)=0$，这与股票上涨和下跌无关。但是，投资者将得到初始的无风险投资 $C(0)+\frac{4}{11}A(0)-\frac{1}{2}S(0)$ 加上利息带来的利润，因此存在套利机会。

另一方面，如果 $C(0)+\frac{4}{11}A(0)<\frac{1}{2}S(0)$，那么在时间 0：

- 支付 $C(0)$美元买入 1 份期权。

- 支付$\frac{4}{11}\times 100=\frac{400}{11}$美元买入$\frac{4}{11}$份债券。

- 卖空 $x=\frac{1}{2}$股股票得到$\frac{1}{2}\times 100=50$ 美元。

这些交易的现金余额是正的，即$-C(0)-\frac{4}{11}A(0)+\frac{1}{2}S(0)>0$，可以进行无风险投资。用这种方法就可以构造一个资产组合，其初始价值 $V(0)=0$。随后，在时间 1：

- 如果股票上涨，则行使期权，获得市场价和施权价的差价 20 美元；如果股票下跌，没有任何收益。你的收入将是 $C(1)$，包含两种可能性。

- 以$\frac{4}{11}A(1)=\frac{4}{11}\times 100=\frac{400}{11}$美元卖出债券。

● 终止股票空头头寸，支付$\frac{1}{2}S(1)$，即如果股票价格上涨，支付$\frac{1}{2}\times120=60$美元；如果股票价格下跌，支付$\frac{1}{2}\times80=40$美元。

这些交易的现金余额为零，即$C(1)+\frac{4}{11}A(1)-\frac{1}{2}S(1)=0$，无论股票上涨还是下跌。但是，投资者可以得到来自无风险投资的$-C(0)-\frac{4}{11}A(0)+\frac{1}{2}S(0)$加上利息带来的利润，与无套利原则矛盾。 □

我们再一次看到，套利策略的一般模式是卖出（或者卖空，如果有必要）价格高的证券，买入价格低的证券，不管将来会发生什么，只要在履行金融义务的过程中可以获利即可。

命题 1.3 暗含期权今天的价格一定是

$$C(0)=\frac{1}{2}S(0)-\frac{4}{11}A(0)\cong13.6364\text{（美元）}$$

任何人以低于这个价格买入期权或高于这个价格卖出期权，就存在套利机会，相当于分发意外之财。这就完成了解决问题的第二步。

注 1.2

注意，股票上涨或下跌的概率 p 和 $1-p$ 与定价和复制期权无关。这是该理论的显著特色，不是巧合。

注 1.3

在期权可以被股票和债券复制的市场，期权似乎是多余的。在简化的单期模型中，这个结论也成立。但在包含多个时期（或者连续时间）的情况下，复制是非常繁重的任务。在每一个时期都会发生价格变化，需要即时调整股票和债券的头寸，必须考虑管理和交易的成本。在某些情况下，不可能准确地复制期权，这就是为什么大多数投资者宁愿买卖期权，而复制仅为机构和交易商形式上的交易。

练习 1.7

假设债券和股票的价格 $A(0)$，$A(1)$，$S(0)$，$S(1)$ 设定同上，计算如下两种情况施权日为时间 1 的看涨期权的价格 $C(0)$：(a) 施权价为 90 美元；(b) 施权价为 110 美元。

练习 1.8

假设价格 $A(0)$，$S(0)$，$S(1)$ 设定同上，如果 (a) $A(1)=105$

18 美元；(b) $A(1)=115$ 美元，计算施权价为 100 美元，施权日为时间 1 的看涨期权的价格 $C(0)$。

施权价为 100 美元，施权日为时间 1 的看跌期权给出了在时间 1 以 100 美元卖出 1 股股票的权利。如果股票上涨，这种期权就没有任何价值，否则将带来利润，其回报为

$$P(1)=\begin{cases}0 & \text{如果股票上涨}\\ 20 & \text{如果股票下跌}\end{cases}$$

假设 $A(0)$，$A(1)$，$S(0)$，$S(1)$ 设定同上，则资产组合概念可以扩展到允许看跌期权头寸，与前面一样，我们用 z 表示看跌期权头寸。

看跌期权的复制和定价与看涨期权的模式相同，特别地，看跌期权的价格 $P(0)$ 等于用股票和债券复制的投资在时间 0 的价值。

注 1.4

看跌期权和远期合约空头头寸的相似之处是，两者都包含在将来的某个确定时间，以固定价格卖出资产。本质的不同是，远期合约空头头寸的持有者有义务以固定的价格卖出资产；而看跌期权的持有者，有权利但没有义务卖出资产。而且，想购买看跌期权的投资者将进行支付，但在进行远期合约交易时，没有支付。

练习 1.9

假设债券和股票的价格 $A(0)$，$A(1)$，$S(0)$，$S(1)$ 设定同上，计算施权价为 100 美元的看跌期权的价格 $P(0)$。

一个投资者希望同时交易期权和取得远期合约头寸。在这样的情况下，我们用 z_1，z_2，z_3，… 描述资产组合中的这些头寸。这些证券的共同特征是，它们的回报取决于股票价格。我们将在第 7 章中论述衍生证券的一般性质，并在第 8 章中将定价和复制方法扩展到更复杂（更符合实际）的市场模型及其他金融工具。

1.7 用期权管理风险

19 期权和衍生证券的应用可以扩展到其他投资领域。假设投资者的初始财富为 1 000 美元，按 1.6 节的设定比较以下两个投资：

● 购买 10 股股票，在时间 1 的价值为

$$10\times S(1)=\begin{cases}1\ 200 & \text{如果股票上涨}\\ 800 & \text{如果股票下跌}\end{cases}$$

或者

● 购买$\frac{1\ 000}{13.636\ 4}\cong 73.333\ 3$份期权，在这种情况下，投资者的最终财富是

$$73.333\ 3\times C(1)\cong\begin{cases}1\ 466.67 & \text{如果股票上涨}\\ 0.00 & \text{如果股票下跌}\end{cases}$$

如果股票上涨，与股票投资相比，期权投资产生的收益将更高，大约高 46.67%。否则，将是灾难性的：投资者将损失所有的财富。而当投资者投资于股票时，会得到 20%或者损失 20%。由于没有指定概率，我们不能计算期望收益和标准差。但我们认为，与投资于股票相比，期权的风险更高。这可能会被愿意冒风险的投资者利用。

练习 1.10

在上述设定下，计算初始财富为 1 000 美元，期权投资和股票投资各占一半的投资者的最终财富。

期权还可以用于降低风险。考虑一个计划在将来购买股票的投资者，股票今天的价格是 $S(0)=100$ 美元。但是，投资者仅在时间 $t=1$ 有可用资金，股票在时间 1 的价格会变成

$$S(1)=\begin{cases}160 & \text{概率为 } p\\ 40 & \text{概率为 } 1-p\end{cases}$$

对某一个 $0<p<1$。与前面一样，我们假设 $A(0)=100$ 美元；$A(1)=110$ 美元。比较如下两个策略：

● 等到时间 1，当资金可利用时，以 $S(1)$ 的价格购买股票；

20

● 在时间 0，借钱购买施权价为 100 美元的看涨期权，在时间 1 归还贷款及利息；如果股票价格上涨，则行使期权购买股票。

如果投资者选择第一种策略，他将面临不可忽视的风险。如果选择第二个策略，他将借入 $C(0)\cong 31.818\ 2$ 美元购买期权。在时间 1，他将归还 35 美元结清贷款，并利用期权购买股票，购买 1 股的成本将是

$$S(1)-C(1)+35=\begin{cases}135 & \text{如果股票上涨}\\ 75 & \text{如果股票下跌}\end{cases}$$

比较这两个策略，显然，与选择第一种策略相比，选择第二种策略的风

险较低。

练习 1.11

如果用购买 1 股的成本的标准差度量风险，计算使用期权和不使用期权的风险：(a) $p=0.25$；(b) $p=0.5$；(c) $p=0.75$。

练习 1.12

证明无论概率 $0<p<1$ 为何值，含有期权的策略的风险（用购买 1 股的成本与标准差度量）是没有期权的策略的风险的一半。

如果购买两个期权，风险将降为零，即

$$S(1)-2\times C(1)+70=110 \quad \text{概率为 } 1$$

这个策略等价于远期合约多头，因为股票远期价格恰是 110 美元（见 1.5 节）。它还等价于今天借 100 美元购买 1 股股票，在时间 1 归还 110 美元结清贷款。

我们在第 9 章论述金融工程时将讨论各种利用期权管理风险——例如增加或者减少风险，研究复杂的风险暴露，构造回报模式以处理投资者的特殊需要——的方法。

第 2 章　无风险资产

2.1　货币的时间价值

21

在现实生活中，一年以后获得的 100 美元的价值要少于今天的 100 美元，其主要原因是，将来得到的或者在固定期限账户中的货币不能现在花费，因此人们希望补偿延期消费。另外，在此期间，价格可能会上涨，与现在相比，货币没有相同的购买力。总之，总存在风险，尽管风险很小，对货币影响甚微。无论何时，未来的支付在某种程度上具有不确定性，以至于今天的价值将缩减以补偿风险。（而在本章中，我们考虑不受这种风险影响的情况。）作为无风险资产的典型例子，我们将考虑银行存款和债券。

货币时间价值变化的方式在金融学中是具有基础性的重要的复杂问题。我们在本章中将主要研究两个问题：

- 什么是今天借入的或投资的金额的终值？
- 什么是未来某个时间支付的或收到的金额的现值？

答案取决于多种因素，我们将在本章讨论，这个论题称为**货币的时间价值**。

2.1.1 单利

22 假设一定量的资金存入银行账户，将得到**利息**（interest）。这个投资的**终值**为初始的存款——称为**本金**，用 P 表示——再加上从货币存入银行时开始计算的利息。

首先，我们考虑利息仅由本金产生的情况，且在投资期内本金不变。例如赚得的利息以现金的方式支付，利息存在另外的账户，不产生利息，或者某个更长的期限之后，存入原来的账户。

一年以后，赚得的利息为 rP，这里 $r>0$ 是利率，这个投资的价值变为 $V(1)=P+rP=(1+r)P$。两年以后，这个投资增长为 $V(2)=(1+2r)P$。我们现在考虑一个分数年，一般是按天计算利息：1 天得到的利息为$\frac{1}{365}rp$。n 天以后的利息为$\frac{n}{365}rP$，于是投资的总价值变就为 $V\left(\frac{n}{365}\right)=\left(1+\frac{n}{365}r\right)P$。这导出下面的**单利**（simple interest）公式，对于在时间 t 的投资价值 $V(t)$，有

$$V(t)=(1+tr)P \tag{2.1}$$

式中，时间 t 以年为单位，可以是任意的非负实数，见图 2—1。特别地，显然有等式 $V(0)=P$ 成立，$1+rt$ 称为**增长因子**（growth factor）。这里我们假设利率 r 是常数。如果在时间 s，而不是在时间 0 投资的本金为 P，那么在时间 $t\geqslant s$ 的价值为

$$V(t)=(1+(t-s)r)P \tag{2.2}$$

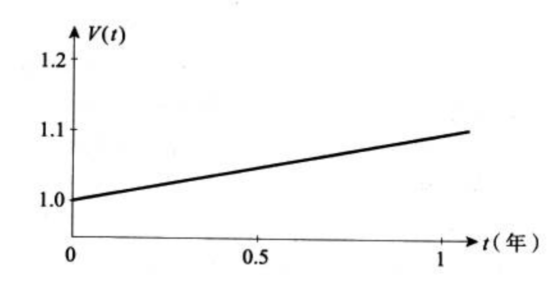


图 2—1 利率为 10%的本金产生的单利（$r=0.1$，$P=1$）

23 本书中的时间单位为年。我们会将其他单位的期限（天、周、月）转换成分数年。

例 2.1

考虑一笔 150 美元、持有 20 天的存款，按利率 8%产生单利。于是，可知 $t=\frac{20}{365}$，$r=0.08$。20 天以后，存款将增长为 $V\left(\frac{20}{365}\right)=\left(1+\frac{20}{365}\times 0.08\right)\times 156\cong 150.66$ 美元。

在时间 s 开始投资于时间 t 到期的投资的**收益率**，我们用 $K(s, t)$ 表示。收益率 $K(s, t)$ 可以由下式给出，即

$$K(s, t)=\frac{V(t)-V(s)}{V(s)} \tag{2.3}$$

在单利的情况下，有

$$K(s, t)=(t-s)r$$

这显然可以由式（2.2）得出。特别地，利率等于期限为 1 年的投资的收益率

$$K(0, 1)=r$$

作为一般规则，利率总是以 1 年为期限。这样容易比较两个不同的投资，与实际的投资期限无关。而收益率既与利率又与投资时间的长度有关。

练习 2.1

将 9 000 美元存入银行账户 2 个月（61 天），按单利计算。期末终值为 9 020 美元。计算利率 r 和这个投资的收益率。

练习 2.2

如果你要求的收益率为 2%，未来某个时间收入 1 000 美元，今天你会支付多少？

练习 2.3

将 800 美元存入银行账户，按单利计算。期末终值为 830 美元。如果利率为 9%，需要存入多长时间？计算这个投资的收益率。

24

练习 2.4

将一笔资金存入银行账户，按单利计算，利率为 8%，3 个月（91 天）后为 1 000 美元，计算本金。

最后的练习涉及一个重要的一般性问题，给定在时间 t 的价值，计算初始金额。在单利的情况下，利用式（2.1）容易计算出本金，于是有

$$V(0)=V(t)(1+rt)^{-1} \tag{2.4}$$

这个数值称为**现值**或者 $V(t)$ 的**折现值**，$(1+rt)^{-1}$为**折现因子**。

例 2.2

永续债券（perpetuity）是在相等的时间间隔，固定金额的支付序列，并且连续地永久支付。例如，支付金额为 C，一年支付一次，C 是第一次支付的应付款，这可以以常数利率 r 在银行存款

$$P=\frac{C}{r}$$

得到。这样的存款将产生每个支付金额为 $C=rP$ 的利息序列。

实际上，单利只用于短期投资以及特定类型的贷款和存款。用它来描述长期的货币价值是不适用的。在多数情况下，已经获得的利息可以再投资生产更多的利息，产生的收益比由式（2.1）得出的收益更多。下面我们将详细分析。

2.1.2 按期复合

首先，假设在银行账户的存款金额为 P，利率 $r>0$ 为常数。与单利的情况相比，我们假设获得的利息定期地加入本金中，例如 1 年、半年、1 个季度、1 个月、1 周甚至 1 天。这样，不仅原来的本金产生利息，而且利息也产生利息，下面我们将论述离散或按期复合的情形。

例 2.3

25

在按月计算的情况下，第一次支付利息是在 1 个月以后，利息为$\frac{r}{12}P$，本金增加到$\left(1+\frac{r}{12}\right)P$，将在以后产生利息。下一次利息支付的金额为$\frac{r}{12}\left(1+\frac{r}{12}\right)P$，资本将变成$\left(1+\frac{r}{12}\right)^{2}P$；1 年以后将变成$\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12}P$；$n$ 个月之后变成$\left(1+\frac{r}{12}\right)^{n}P$；$t$ 年以后变成$\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12t}P$。最后的公式允许 t 等于月的整数倍，即$\frac{1}{12}$的倍数。

一般说来，如果每年支付 m 次利息，则两次支付的时间间隔按年计算将是$\frac{1}{m}$年。第一次支付利息是在时间$\frac{1}{m}$。每一次利息支付都将因子

$\left(1+\frac{r}{m}\right)$加入本金。假设利率保持不变，$t$ 年以后，原来的本金 P 将变成

$$V(t)=\left(1+\frac{r}{m}\right)^{tm}P \tag{2.5}$$

因为在这期间有 tm 次利息支付。在式（2.5）中，t 必须是$\frac{1}{m}$的整数倍，$\left(1+\frac{r}{m}\right)^{tm}$是**增长因子**。

有时，在利息支付的瞬间需要知道投资的准确价值。特别地，这可能需要在非利息支付日结算账户。例如，假如以利率 12%按月结算，100 美元储蓄 10 天以后的价值是多少？一个可能的答案是 100 美元，因为第一次支付将会在一个整月之后，这启发我们将式（2.5）扩展到任意的 t 值，其方法是通过阶梯函数，其步长是期限的$\frac{1}{m}$，如图 2—2 所示。随后，在注 2.6 我们将看到利用式（2.5）的右边对所有的 $t\geqslant 0$ 与无套利原则一致的扩展。

26

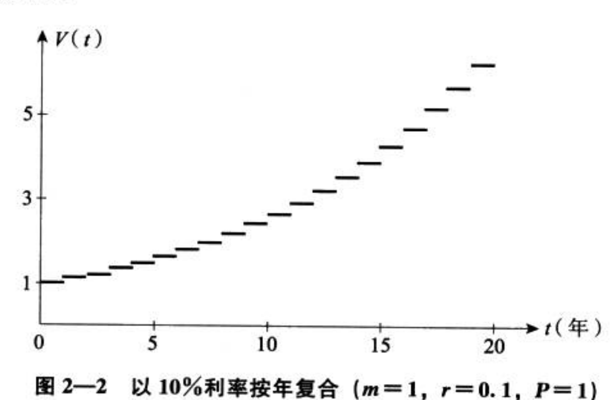


图 2—2　以 10%利率按年复合（$m=1$，$r=0.1$，$P=1$）

练习 2.5

以利率 6%按天产生利息，多长时间资本可以翻倍？

练习 2.6

如果存款按年复合计息 10 年以后翻倍，计算利率是多少？

练习 2.7

计算并比较利率为 10%，100 美元储蓄 2 年以后的终值：(a) 按年复合；(b) 按半年复合。

命题 2.1

参数 m，t，r 或者 P 中的任意参数增加，其他参数不变，则终值

$V(t)$ 增加。

证明

由式(2.5)可知，如果 t，r 或者 P 增加，则 $V(t)$ 增加。为证明 $V(t)$ 会随着 m 的增加而增加，我们需要验证如果 $m<k$，则

$$\left(1+\frac{r}{m}\right)^{tm}<\left(1+\frac{r}{k}\right)^{tk}$$

显然，上式可简化为

$$\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}<\left(1+\frac{r}{k}\right)^{k}$$

27 我们可以直接利用二项式公式验证，

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}&=1+r+\frac{1-\frac{1}{m}}{2!}r^2+\cdots+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{m-1}{m}\right)}{m!}r^m\\&\leqslant 1+r+\frac{1-\frac{1}{k}}{2!}r^2+\cdots+\frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{m-1}{k}\right)}{m!}r^m\\&<1+r+\frac{1-\frac{1}{k}}{2!}r^2+\cdots+\frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{k-1}{k}\right)}{k!}r^k\\&=\left(1+\frac{r}{k}\right)^{k}\end{aligned}$$

第一个不等式成立，是因为不等式左边的每一项不大于不等式右边的每一项。第二个不等式是正确的，是因为不等式右边的和式比左边多 $m-k$ 非零(正)项，这样就完成了证明。 □

练习 2.8

1 000 美元存款，利率为 15%，按天复合，1 年后的终值与利率为 15.5%，按半年复合，1 年后的终值各为多少？哪一个更多？

练习 2.9

假设利率为 12%，按年复合，2 年以后终值为 1 000 元，计算初始投资是多少。

练习 2.9 提及在应用离散复合时，在将来某个时间所支付金额的现值问题。在这里，$V(t)$ 的现值或者折现值的公式为

$$V(0)=V(t)\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-tm}$$

数值$\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-tm}$为折现因子。

注 2.1

对固定投资的最终价值$V(t)$，命题 2.1 的一个直接的推论是，如果其他因子保持不变，而因子r，t，m中的一个或多个减少，则现值增加。

练习 2.10

28

假设在存款期限内利率为 5%，计算 100 年以后收到的 100 000 美元的现值：(a) 按天复合；(b) 按年复合。

给定将来某个固定时间T的价值$V(T)$，我们常常要计算在时间$0<t<T$的投资的价值$V(t)$。这可以由计算$V(T)$的现值得出，取$V(T)$作为本金，投资到时间t，复合频率为m，利率为r，显然有

$$V(t)=\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-(T-t)m}V(T) \tag{2.6}$$

为计算按期复合产生利息的存款的收益率，我们利用公式 (2.3)，有

$$K(s,t)=\frac{V(t)-V(s)}{V(s)}=(1+\frac{r}{m})^{(t-s)m}-1$$

特别地，

$$K\left(0,\frac{1}{m}\right)=\frac{r}{m}$$

这就提供了一种给定收益率计算利率的简单的方法。

练习 2.11

计算$r=10\%$，按月复合的一年的收益率。

练习 2.12

如果复合频率$m>1$，利率r和收益率$K(0,1)$哪一个更大？

注 2.2

如果是按期复合，则存款的收益率是不可加的。为简单起见，假设$m=1$，于是有

$$K(0,1)=K(1,2)=r$$
$$K(0,2)=(1+r)^2-1=2r+r^2$$

显然有$K(0,1)+K(1,2)\neq K(0,2)$。

2.1.3 支付流

29 **年金**是金额固定、时间间隔相等的有限的支付序列。假设金额为 C 的支付每年支付一次（连续 n 年，第一次是在一年以后）。假设按年复合，我们计算该支付流的现值。我们先计算出所有支付的现值，然后相加，于是有

$$\frac{C}{1+r}+\frac{C}{(1+r)^2}+\frac{C}{(1+r)^3}+\cdots+\frac{C}{(1+r)^n}$$

为方便，我们引入下列符号

$$\mathrm{PA}(r,\ n)=\frac{1}{1+r}+\frac{1}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{1}{(1+r)^n} \tag{2.7}$$

式（2.7）称为**年金的现值因子**。可以将年金的现值表示为简单的形式，即

$$\mathrm{PA}(r,\ n)\times C$$

表达式 $\mathrm{PA}(r,\ n)$ 可以用下列公式简化

$$a+qa+q^2a+\cdots+q^{n-1}a=a\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

考虑情况 $a=\frac{1}{1+r}$，$q=\frac{1}{1+r}$，于是有

$$\mathrm{PA}(r,\ n)=\frac{1-\ (1+r)^{-n}}{r} \tag{2.8}$$

注 2.3

注意，初始银行存款

$$P=\mathrm{PA}(r,\ n)\times C=\frac{C}{1+r}+\frac{C}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{C}{(1+r)^n}$$

以利率 r 按年复合产生每次支付为 C 的 n 年支付序列。存款 $C(1+r)^{-1}$ 一年以后将增加为 C，这恰是第一次支付的年金。存款 $C(1+r)^{-2}$ 两年以后变为 C，为第二次年金支付。如此继续下去，存款 $C(1+r)^{-n}$ 将是 n 年以后的最后一次年金支付。

30 **例 2.4**

考虑一个 1 000 美元的贷款分 5 年等额分期偿付的情况。分期偿付包

括两部分，未偿还的金额按利率 15%计算的利息和贷款部分。这种类型的贷款称为**分期偿还贷款**（amortised loan）。每年偿还的金额为

$$\frac{1\ 000}{\mathrm{PA}(15\%,\ 5)} \cong 298.32$$

这是因为，从贷款人的角度看，这种贷款等价于年金。

练习 2.13

接例 2.4 回答，每次分期偿还的利息金额是多少？每次分期偿还的贷款是多少？每次分期支付以后贷款的余额是多少？

练习 2.14

如果利率为 18%，每年年末你能承受的支付是 10 000 美元，你想在 10 年内还清贷款，你能借多少？

练习 2.15

假设你想要在每年年末存款 1 200 美元，持续 40 年，按常数利率 5%按年复合，计算 40 年以后的余额。

练习 2.16

假设你借了一笔 100 000 美元的住房抵押贷款，每年等额分期偿还，10 年还清，每次还款额由支付的余额部分的利息额加上归还借款余额部分构成。如果你决定 8 年以后还清贷款，除了第 8 年的分期付款之外，你还需要支付多少？假设在贷款期限内以利率 6%按年复合。

前面提到，永续年金是在每年末发生的固定金额的无限支付序列。当$n\to\infty$时，永续年金的现值公式可由式（2.7）取极限得到，于是有

31

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{PA}(r,\ n)\times C=\frac{C}{1+r}+\frac{C}{(1+r)^2}+\frac{C}{(1+r)^3}+\cdots=\frac{C}{r} \qquad (2.9)$$

这个金额是几何级数之和。

注 2.4

永续年金的现值可利用例 2.2 中的公式给出，尽管按期复合用单利代替。这两种情况下的年金支付 C 精确地等于全年利息收入，保持下一年利息收入的金额是$\frac{C}{r}$。而按期复合让我们看到用不同的方法可以得到的同样的支付序列。永续年金的现值被分解成如式（2.9）中的无限个部

分，每一个产生的支付都是 C。

注 2.5

年金因子公式（2.8）用如下方法比较容易记忆，利用永续年金公式，n 个支付为 $C=1$ 的序列可以表示成两个不同的永续年金的差，一个从现在开始，另一个从 n 年以后开始（切掉永续年金的尾部，就可以得到年金），我们需要计算后面的永续年金的现值，这可由折现因子 $(1+r)^{-n}$ 得到，所以有

$$\mathrm{PA}(r, n)=\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\times\frac{1}{(1+r)^{n}}=\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

练习 2.17

计算以常数利率 g 增长的形如 C，$C(1+g)$，$C(1+g)^{2}$，… 的无穷支付序列的现值。利用切掉尾部的方法计算 n 次支付的现值公式。

2.1.4 连续复合

32

本金为 P，利率 $r>0$，一年复合 m 次的终值公式（2.5）可以写为

$$V(t)=\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{tr}P$$

令 $m\to\infty$，有

$$V(t)=\mathrm{e}^{tr}P \tag{2.10}$$

式中，

$$\mathrm{e}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

是自然对数的底数。这就是著名的**连续复合**，相应的**增长因子**为 e^{tr}；$V(t)$ 的图形如图 2—3 所示。

$V(t)=\mathrm{e}^{tr}P$ 的导数为

$$V'(t)=r\mathrm{e}^{tr}P=rV(t)$$

在连续复合的情况下，增长率与当前财富成比例。

当频率 m 很大时，式（2.10）是按期复合的很好的近似，它更简单并且比按期复合公式更适用。

33

练习 2.18

1 000 000 美元存款按利率 10%连续复合，多长时间可以得到 1

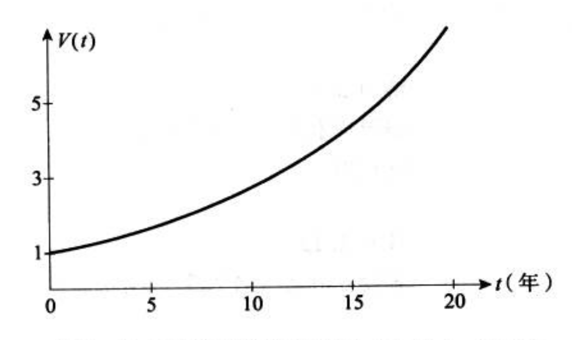


图 2—3 以 10%利率连续复合（$r=0.1$，$P=1$）

美元利息收入？

练习 2.19

1626 年，新尼德兰（New Netherland）的统治者彼得·米纽伊特（Peter Minuit）从印第安人手里购买曼哈顿岛，用玻璃球、毛织品和小装饰品支付，价值 24 美元，计算这笔钱在 2000 年的价值：(a) 利率 5%连续复合；(b) 利率 5%按年复合。

命题 2.2

假设本金 P 和利率 r 相同，则与任意频率 m 的按期复合相比，连续复合的价值更高。

证明

只须验证

$$e^{tr} > \left(1+\frac{r}{m}\right)^{tm} = \left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{rt}$$

因为序列 $\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}}$ 是递增的，并且当 $m \nearrow \infty$ 收敛于 e，所以不等式成立。

□

练习 2.20

利率为 10%，100 美元储蓄 1 年以后按月复合和连续复合的差是多少？如果要使差额小于 0.01 美元，按期复合的频率是多少？

在连续复合之下，现值可由下式给出

$$V(0) = V(t)e^{-tr}$$

在这种情况下，折现因子为 e^{-tr}，给定终值 $V(T)$，于是有

$$V(t)=\mathrm{e}^{-r(T-t)}V(T) \tag{2.11}$$

练习 2.21

34 假设以利率 6%连续复合，计算 20 年以后得到的 1 000 000 美元的现值。

练习 2.22

假设 950 美元连续复合半年后的终值是 1 000 美元，计算利率。

与按期复合情况相同，对于连续复合情况，由式（2.3）定义的投资收益 $K(s,t)$ 也是不可加的。为方便起见，我们引入对数收益率

$$k(s,t)=\ln\frac{V(t)}{V(s)} \tag{2.12}$$

命题 2.3

对数收益率是可加的，即

$$k(s,t)+k(t,u)=k(s,u)$$

证明

由式（2.12）容易得出，

$$\begin{aligned}k(s,t)+k(t,u)&=\ln\frac{V(t)}{V(s)}+\ln\frac{V(u)}{V(t)}\\&=\ln\frac{V(t)}{V(s)}\frac{V(u)}{V(t)}=\ln\frac{V(u)}{V(s)}=k(s,u)\end{aligned}$$

□

如果 $V(t)$ 由式（2.10）给出，则 $k(s,t)=r(t-s)$，这容易得出利率

$$r=\frac{k(s,t)}{t-s}$$

练习 2.23

假设以利率 3%连续复合，投资 2 个月的对数收益为 3%，计算利率。

2.1.5 如何比较复合方法

35 我们已经注意到，如果利率和初始本金相同，与不频繁复合相比，频繁复合产生的终值更高。假设初始本金相同，我们将考虑一种复合方

法将会比另一种方法产生相同或者更高的终值的一般情况。

例 2.5

假设存在一个承诺一年以后支付 120 美元的凭证，现在可以买入或卖出该凭证，也可以在本年期间任意时间以 100 美元买卖，在按年复合之下，与常数利率 20%一致。如果一个投资者决定买入该凭证，半年以后卖出，卖出的价格是多少？假设为 110 美元，通常推测是将年利润 20 美元二等分。可是这个价格太高，会产生如下的套利策略：

- 借入 1 000 美元以每份 100 美元买入 10 份凭证。
- 6 个月以后，以每份 110 美元卖出 10 份凭证，以每份 100 美元的价格买入 11 份新凭证，余额变成零。
- 另一个 6 个月以后，以每份 110 美元的价格卖出 11 份凭证，在当天获得 1 210 美元，支付 1 200 美元还清贷款的本息，10 美元余额是套利利润。

另一个相似的论断证明，6 个月以后凭证的价格不可能太低，例如 109 美元。

6 个月以后凭证的价格与半年复合利率相关，如果这个利率为 r，则价格为 $100\left(1+\frac{r}{2}\right)$，反之亦然。如果相应的 1 年的增长因子 $\left(1+\frac{r}{2}\right)^2$ 等于按年复合的增长因子 1.2，即

$$\left(1+\frac{r}{2}\right)^2=1.2$$

则套利不会发生。由此得到 $r\cong 0.1909$ 或者 19.09%。如果是这样的话，6 个月以后凭证的价格应该是 $100\left(1+\frac{0.1909}{2}\right)\cong 109.54$ 美元。

这个想法基于固定期限的增长因子的考虑，一般是 1 年，可以用于比较两种复合方法。

定义 2.1

36

如果 1 年期限相应的增长因子是相同的，则我们说两个复合方法是等价的。如果一个增长因子超过另一个增长因子，则我们认为前一种复合方法更好。

例 2.6

以利率 10%按半年复合等价于以利率 10.25%按年复合，实际上，

前者的 1 年增长因子为

$$\left(1+\frac{0.1}{2}\right)^2=1.1025$$

与后者的增长因子是相同的，两个都好于 9%的按月复合，其 1 年的增长因子仅为

$$\left(1+\frac{0.09}{12}\right)^{12}\cong 1.0938$$

我们能够利用重新计算利率从一个复合方法转换到另一个等价的复合方法。在本章的余下部分，我们将从按年复合或者连续复合中选择其一。

练习 2.24

计算连续复合等价于以利率 12%按月复合的利率。

练习 2.25

计算等价于利率为 21%年复合的利率为 20%的按期复合频率。

不比较增长因子，而比较如下定义的有效利率常常更为方便。

定义 2.2

对于给定的以 r 为利率的复合方法，有效利率 r_e 为 1 年期按年复合之下的给出相同增长因子的利率。

37

特别地，在频率为 m 和利率为 r 的按期复合情况下，有效利率 r_e 满足

$$\left(1+\frac{r}{m}\right)^m=1+r_e$$

在以 r 为利率的连续复合情况下，有

$$e^r=1+r_e$$

例 2.7

在利率为 10%的按半年复合的情况下，有效利率为 10.25%，见例 2.6。

命题 2.4

当且仅当相应的有效利率 r_e 和 r'_e 相等，即 $r_e=r'_e$ 时，两个复合方法是等价的。当且仅当 $r_e>r'_e$ 时，以 r_e 为有效利率的复合方法好于另一个方法。

证明

这是因为一年的增长因子分别为 $1+r_e$ 和 $1+r'_e$。 □

例 2.8

在练习 2.8 中，我们已经看到利率为 15%的按天复合利率好于利率为 15.5%的按半年复合利率。相应的有效利率 r_e 和 r'_e可以由下面的公式计算出：

$$1+r_e=\left(1+\frac{0.15}{365}\right)^{365}\cong 1.161\,8$$

$$1+r'_e=\left(1+\frac{0.155}{2}\right)^{2}\cong 1.161\,0$$

这意味着，r_e 大约为 16.18%；r'_e大约为 16.10%。

注 2.6

回想按期复合公式 (2.5)，即

$$V(t)=\left(1+\frac{r}{m}\right)^{tm}P$$

38

时间间隔 t 只允许为复合期$\frac{1}{m}$的整数倍，类似于例 2.5 的论证。初始值为 P 且在任意时间 $t\geqslant 0$ 的无套利价值应当为$\left(1+\frac{r}{m}\right)^{tm}P$。因此式 (2.5) 的一个合适的扩展是，公式的右边适用于任意 $t\geqslant 0$，而不考虑 t 是否为$\frac{1}{m}$的整数倍。从现在开始我们将总是利用这个扩展。

利用有效利率 r_e，终值可以写为

$$V(t)=(1+r_e)^tP$$

对所有 $t\geqslant 0$，这可以应用于连续复合以及在注 2.6 中的任意时间的按期复合。命题 2.4 暗含，给定相同的初始本金、等价的复合方法，对所有的时间 $t\geqslant 0$ 将产生相同的终值。类似地，如果一个复合方法优于另一个复合方法，对于所有的时间 $t>0$，前者将产生更高的终值。

注 2.7

单利没有相应的比较复合方法的功能。在单利情况下，终值 $V(t)$ 为时间 t 的线性函数。而无论应用按期复合利率还是连续复合利率，都是指数函数。且这样的函数图形之间最多有两个交点，于是对于所有的 $t\geqslant 0$，它们之中的一个图形不可能与另一个图形相同（除了零本金的情况）。

练习 2.26

连续 n 年，月支付金额为 C 的年金的现值是多少？用有效利率

r_e 回答。

练习 2.27

每两个月支付金额为 C 的永续年金的终值是多少？用有效利率 r_e 回答。

2.2 货币市场

39

货币市场（money market）由无风险（更精确的说法是无违约）证券构成。例如债券，它是一种金融证券，该证券承诺对持有者支付有保障的未来的支付序列。无风险意味着这些支付具有确定性（不过，在这种情况下，风险还是不能完全避免，因为这些证券的市场价格的波动不可预测，见第 10 章和第 11 章）。债券的种类很多，例如短期国债和中期国债、国库券、抵押贷款和公司债券、商业票据以及有各种各样特殊约定的其他债券，这些约定涉及发行机构、存续期、支付数量、嵌入的权利和担保等。

2.2.1 零息债券

最简单的债券是零息债券，它仅包含一次支付。发行机构（例如，政府、银行或者公司）承诺对交易的证券支付确定的金额 F，称为面值。支付的日期为到期日。通常而言，零息债券的期限为 1 年；面值为某一个整数字，例如 100。实际上，个人或机构买债券相当于贷款给债券的发行者。

给定利率，这种债券的现值就很容易计算。假设面值为 $F=100$ 美元的债券 1 年后到期，按年复合利率 r 为 12%，那么该债券的现值应该为

$$V(0)=F(1+r)^{-1}\cong 89.29\text{（美元）}$$

实际上，因为债券可以自由交易，价格由市场决定，则利率可以由价格推出，即

$$r=\frac{F}{V(0)}-1 \tag{2.13}$$

式（2.13）给出了隐含的按年复合利率。例如，面值为 100 美元的 1 年期债券以 91 美元交易，那么隐含的利率为 9.89%。

为简单起见，我们考虑单位债券，其面值为一个本国货币单位，即 $F=1$。

40 一般地，债券可以在到期日之前的任何时间以市场价格卖出。在时间 t 的价格我们用 $B(t, T)$ 表示，特别地，$B(0, T)$ 是债券在时间 0 的价格；$B(T, T)=1$ 等于面值。可以利用式（2.6）和式（2.11）两式中的价格确定利率，取 $V(t)=B(t, T)$，$V(T)=1$。例如，按年复合利率满足方程

$$B(t, T)=(1+r)^{-(T-t)}$$

如果使用不同的复合方法，上一公式可作适当的修改。使用频率为 m 的按期复合，我们有

$$B(t, T)=\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-m(T-t)}$$

在连续复合的情况下，利率满足方程

$$B(t, T)=\mathrm{e}^{-r(T-t)}$$

当然，这些不同的**隐含利率**（implied rate）是等价的，因为债券的价格不取决于应用的复合方法。

注 2.8

一般来说，隐含利率依赖于交易时间 t 和到期时间 T。这是一个重要问题，我们将在第 10～11 章讨论。目前，我们采用简单的假设，即直到到期日，利率保持不变。

练习 2.28

投资者支付 95 美元买入面值 100 美元、6 个月到期的债券，如果利率保持不变，何时债券的价值达到 99 美元?

练习 2.29

利用 $B(0.5, 1)=0.9455$，计算按年、半年和连续复合的隐含利率。

注意，对每一种复合方法，$B(0, T)$ 为折现因子；$B(0, T)^{-1}$ 为增长因子。不借助于利率计算货币的时间价值，就需要使用这些增长因子。然而，利率是有用的，因为利率更直观。对于一般的银行客户，他们不

41 清楚花 92.59 美元购买的 1 年期面值为 100 美元的债券等价于存期为 1 年，收益率为 8%的存款。

2.2.2 附息债券

承诺一系列支付的债券称为**附息债券**（coupon bonds）。一系列支付包括到期日支付面值和定期支付息票，一般地，债券利息按年、半年或者季支付，最后的息票支付在到期日。利率是常数的假设允许我们用所有未来支付折现的方法计算附息债券价格。

例 2.9

考虑面值 $F=100$ 美元的债券，5 年到期，$T=5$，每年支付息票 $C=10$ 美元，最后一次支付是在到期日。这意味着在每年年末支付的序列为 10，10，10，10，110。给定连续复合利率 r，如 12%，我们可以计算出债券的价格

$$V(0)=10\mathrm{e}^{-r}+10\mathrm{e}^{-2r}+10\mathrm{e}^{-3r}+10\mathrm{e}^{-4r}+110\mathrm{e}^{-5r}\cong 90.27\text{（美元）}$$

练习 2.30

假设债券面值为 100 美元，4 年到期，每年支付息票 $C=5$ 美元，给定连续复合利率：(a) 8%，(b) 5%，计算债券的价格。

练习 2.31

作为连续复合利率 r 的函数画出练习 2.30 中债券的价格图形。当 $r=0$ 时，函数值是什么？当 $r\to\infty$ 时函数的极限是什么？

例 2.10

我们继续研究例 2.9，第一次息票兑现之后，债券变为 4 年期债券，价值为

$$V(1)=10\mathrm{e}^{-r}+10\mathrm{e}^{-2r}+10\mathrm{e}^{-3r}+110\mathrm{e}^{-4r}\cong 91.78\text{（美元）}$$

42

显然，在时间 1 的总财富为

$$V(1)+C=V(0)\mathrm{e}^{r}$$

6 个月以后债券的价值为

$$V(1.5)=10\mathrm{e}^{-0.5r}+10\mathrm{e}^{-1.5r}+10\mathrm{e}^{-2.5r}+110\mathrm{e}^{-3.5r}\cong 97.45\text{（美元）}$$

4 年以后，这个债券变成零息债券，面值为 110 美元，价格为

$$V(4)=110\mathrm{e}^{-r}\cong 97.56\text{（美元）}$$

一个投资者可以选择在到期日之前的任何时间购买债券，此时，债

券的价格仍然可以用未来时间的支付折现计算出。

练习 2.32

画出例 2.9 和例 2.10 中附息债券价格作为时间函数的图形。

练习 2.33

在例 2.9 和例 2.10 中，计算附息债券价格达到 95 美元的第一时间。

息票可以表示为面值的分数倍。假设息票按年支付，我们将记为 $C=iF$，这里的 i 称为**付息率**。

命题 2.5

按年支付息票的债券，当且仅当债券的价格等于它的面值时，付息率等于年复合利率。在这种情况下，我们说债券按照面值卖出。

证明

为避免符号的烦琐，我们举例证明。假设利率按年复合，$r=i$，考虑面值 $F=100$ 美元的债券，3 年到期，$T=3$，那么债券的价格为

43

$$\begin{aligned}\frac{C}{1+r}+\frac{C}{(1+r)^2}+\frac{F+C}{(1+r)^3}&=\frac{rF}{1+r}+\frac{rF}{(1+r)^2}+\frac{F(1+r)}{(1+r)^3}\\&=\frac{rF}{1+r}+\frac{rF}{(1+r)^2}+\frac{F}{(1+r)^2}\\&=\frac{rF}{1+r}+\frac{F(1+r)}{(1+r)^2}=F\end{aligned}$$

反之，注意

$$\frac{C}{1+r}+\frac{C}{(1+r)^2}+\frac{F+C}{(1+r)^3}$$

为 r 的一一对应函数（实际上，是严格的减函数），于是一旦它恰好等于面值，我们就得到 $r=i$。 □

注 2.9

如果债券低于面值卖出，意味着隐含利率高于付息率（因为当利率上升时，债券的价格是下降的）。如果债券的价格高于面值，意味着利率低于付息率。在债券的价格由市场决定，并且显示利率水平变动的情况下，这是重要的信息。

练习 2.34

假设债券的面值 $F=100$ 美元，年息票 $C=8$ 美元，期限 $T=3$

年，按面值交易，计算隐含连续复合利率。

2.2.3 货币市场账户

在货币市场投资可借助于金融中介实现，一般来说，投资银行可以为客户买入或卖出债券（因此会减少交易成本）。投资者的无风险资产头寸由投资者的银行账户的**水平**（level）给出，为方便起见，我们将这个账户看做是可交易资产。实际上果真如此，因为债券本身是可以交易的。货币市场的多头是买资产，即投资货币；空头是借货币。

首先考虑一个在到期日之前终止的零息债券投资。投资在货币市场上的初始金额为 $A(0)$；可以买 $\frac{A(0)}{B(0,\ T)}$ 份债券；在时间 t，每份债券的价值为

$$B(t,\ T)=\mathrm{e}^{-(T-t)r}=\mathrm{e}^{rt}\mathrm{e}^{-rT}=\mathrm{e}^{rt}B(0,\ T)$$

44　因此，在时间 $t\leqslant T$，这个投资将达到

$$A(t)=\frac{A(0)}{B(0,\ T)}B(t,\ T)=A(0)\mathrm{e}^{rt}$$

练习 2.35

如果 $B(0,\ 1)=0.89$，计算投资于零息债券 75 天的收益率。

练习 2.36

6 个月债券的投资收益率为 7%，计算隐含的连续复合利率。

练习 2.37

以 $B(0,\ 1)=0.92$ 的价格购买的债券，多少天以后产生 5%的收益？

在债券上的投资存在时间界限，它将在债券的到期日 T，以 $A(T)=A(0)\mathrm{e}^{rT}$ 终止。为扩展超过时间 T 的货币市场头寸，可以将总额 $A(T)$ 重新投资于在时间 T 发行的债券，到期日 $T'>T$。取 $A(T)$ 作为初始投资，T 为开始时间，于是有

$$A(t')=A(T)\mathrm{e}^{r(t'-T)}=A(0)\mathrm{e}^{rt'}$$

当 $T\leqslant t'\leqslant T'$ 时。重复这个论证，我们实际已得到结论——在货币市场上的投资时限可以延长到投资者所需要的长度，即公式

$$A(t)=A(0)\mathrm{e}^{rt} \tag{2.14}$$

对所有的 $t \geqslant 0$ 成立。

练习 2.38

假设 1 美元投资于 1 年以后到期的零息债券。在每年年末，重新投资于同样类型的新债券。第 9 年年末将购买多少债券？运用隐含的连续复合利率回答。

45

延长在货币市场的投资到所需长度的另一个方法是，将在时间 T 到期的任意债券的面值重新投资于在时间 0 发行但在以后的时间 $t>T$ 到期的另一个债券。以初始投资 $A(0)$ 购买在时间 T 到期的单位债券，则在时间 T 我们将有财富 $\frac{A(0)}{B(0, T)}$。这时，我们可以选择一个在时间 t 到期，在时间 T 的价格是 $B(T, t)$ 的债券，则在时间 t 的财富将是

$$\frac{A(0)}{B(0, T)B(T, t)}=\frac{A(0)}{B(0, t)}=A(0)\mathrm{e}^{rt}$$

这与式（2.14）相同。

最后，考虑附息债券作为在货币市场投资的工具。为简单起见，我们假设第一次息票支付 C 在 1 年以后。在时间 0，我们购买 $\frac{A(0)}{V(0)}$ 份附息债券。1 年以后，我们得到债券利息且以价格 $V(1)$ 卖出债券，得到的总额为 $C+V(1)=V(0)\mathrm{e}^{r}$（见例 2.10）。因为利率是不变的，所以这笔货币的金额是确定的。用这种方法我们就构造了一个面值为 $V(0)\mathrm{e}^{r}$，在时间 1 到期的零息债券。这意味着，前面得出的关于零息债券的方法可以应用于附息债券，对于 $A(t)$ 有与公式（2.14）相同的结论。

练习 2.39

1 000 美元投资于 5 年到期、面值 100 美元、年支付利息 8 美元的债券，且所有的债券利息重新投资于同种债券。假设债券以面值交易，直到到期日。利率是常数。计算每一个投资转换年持有的债券数量。

正如我们已经看到的，在利率不变的假设之下，函数 $A(t)$ 不依赖于货币市场账户的运行方法，也就是既不依赖于投资债券类型的选择，也不依赖于债券到期日扩展方法。

在本书的大部分章节中我们都假设 $A(t)$ 是确定的和已知的。实际上，我们假设 $A(t)=\mathrm{e}^{rt}$，其中 r 为固定利率。我们将在第 10 章中论述可变利率，在第 11 章中论述随机货币市场。

第 3 章　风险资产

47

任意资产的未来价格在某种程度上是不可预测的。在本章中，我们集中研究有代表性的普通股票，尽管如外币、商品或者部分不可预测的未来现金流可能也被考虑。市场价格取决于在不确定的条件下大量的代理人作出的选择和决策。因此，可以认为资产价格是随机的。不过，在一般条件下几乎得不出结论。因此，我们对资产价格附加一些特殊条件，其目的是，一方面使得数学模型逼真和贴切，另一方面使得模型容易处理。

3.1　股票价格动态

股票在时间 t 的价格用 $S(t)$ 表示。假设股票价格对所有的 t 严格为正。我们取 $t=0$ 作为当前的时间；$S(0)$ 是当前股票价格，它对所有投资者是已知的；对所有的 $t>0$，一般来说，将来的股票价格 $S(t)$ 是未知的。在数学上，$S(t)$ 可看做概率空间 Ω 上的正随机变量，即

$$S(t): \Omega \to (0, \infty)$$

概率空间 Ω 由可能的价格变动**状况**（scenarios）$\omega \in \Omega$ 构成。在时间 t，如果市场状况为 $\omega \in \Omega$，则我们用 $S(t, \omega)$ 表示在时间 t 的价格。

48

当前的股票价格 $S(0)$ 是所有投资者都知道的正数，但可以认为它是常数随机变量。对所有的 $t>0$，未知的将来价格 $S(t)$ 是非常数随机变量。这意味着对每个 $t>0$，至少有两个状况 ω，$\tilde{\omega}\in\Omega$ 使得 $S(t,\omega)\neq S(t,\tilde{\omega})$。

假设时间按离散的方式推移，$t=n\tau$，其中 $n=0,1,2,3,\cdots$；τ 为固定的**时段**（time step），一般为 1 年、1 个月、1 周、1 天，甚至是用于描述疯狂交易的 1 分或 1 秒。因为我们取 1 年作为测量时间的单位，所以 1 个月对应于 $\tau=\frac{1}{12}$，1 周对应于 $\tau=\frac{1}{52}$，1 天对应于 $\tau=\frac{1}{365}$，依此类推。

为简化符号，我们用 $S(0)$，$S(1)$，$S(2)$，…，$S(n)$，…代替 $S(0)$，$S(\tau)$，$S(2\tau)$，…，$S(n\tau)$，…，并认为 n 和 $n\tau$ 是相同的。实际上，这种方便的做法已被许多研究时间依赖问题的学者采用。

例 3.1

考虑一个只有两个状况的市场，上涨或者下跌分别用 ω_1 和 ω_2 表示。当前股票价格为 10 美元。1 年以后，如果上涨，则股价为 12 美元；如果下跌，则股价为 7 美元。在这种情况下，$\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$，取 $\tau=1$，于是有

状况	$S(0)$	$S(1)$
ω_1（上涨）	10	12
ω_2（下跌）	10	7

例 3.2

假设有三个可能的市场状况，$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$，股票价格在两个时段取如下值

状况	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
ω_1	55	58	60
ω_2	55	58	52
ω_3	55	52	53

这些股价变动可以用树来表示，见图 3—1。通过树可以很方便地将状况和路径对应起来，即从左边单独的节点（树根）到最右边（树梢）。

这样的价格变动的树结构很容易在数学模型中实现。

49

练习 3.1

画出表示例 3.1 中的状况和价格变动的树。

练习 3.2

假定股票价格在任何一天都比前一天高出 5%或者降低 4%。假设今天股票价格为 20 美元，画出表示未来 3 天可能的股票价格变动的树，并区分可能有多少个不同的状况。

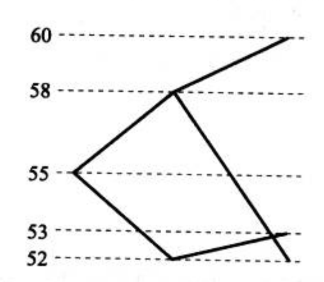


图 3—1　在例 3.2 中的价格变动树

3.1.1　收益

为了方便起见，用收益描述股票价格 $S(n)$ 的动态变化。假设股票不支付红利。

定义 3.1

将时间区间 $[n, m]$（实际上是 $[m\tau, n\tau]$）上的收益率或简称收益 $K(n, m)$ 定义为随机变量，即

$$K(n, m)=\frac{S(m)-S(n)}{S(n)}$$

将单个时段 $[n-1, n]$ 上的收益用 $K(n)$ 表示，即

$$K(n)=K(n-1, n)=\frac{S(n)-S(n-1)}{S(n-1)}$$

可以推导出

$$S(n)=S(n-1)(1+K(n)) \tag{3.1}$$

50

例 3.3

在例 3.2 假设的情况下，假定收益率为随机变量，则收益率取值如下：

状况	$K(1)$	$K(2)$
ω_1	5.45%	3.45%
ω_2	5.45%	−10.34%
ω_3	−5.45%	1.92%

练习 3.3

给定如下的收益率并假设 $S(0)=45$ 美元，计算三个时期股票的可能价格，并画出价格变动树。

状况	$K(1)$	$K(2)$	$K(3)$
ω_1	10%	5%	−10%
ω_2	5%	10%	10%
ω_3	5%	−10%	10%

注 3.1

如果股票在时间 n 支付红利 $\mathrm{div}(n)$，那么收益率的定义将会修改。当有红利支付时，股票价格将会降低同样的数额。因为支付红利的前一天决定获得红利的权利，$S(n)$ 已经受到影响而降低。因为一个投资者在时间 $n-1$ 购买股票 $S(n-1)$，在时间 n 卖出股票将获得 $S(n)+\mathrm{div}(n)$，因此收益率应为

$$K(n)=\frac{S(n)-S(n-1)+\mathrm{div}(n)}{S(n-1)}$$

练习 3.4

如果在每个时段末支付 1 美元红利，将练习 3.3 进行相应的修改。

弄清单时段收益率和长时间区间上收益率之间的关系是重要的。

51

例 3.4

假设 $S(0)=100$ 美元。

1. 考虑 $S(1)=110$ 美元，$S(2)=100$ 美元的情况。在这种情况下，$K(0,\ 2)=0\%$，$K(1)=10\%$，$K(2)\cong-9.09\%$，单时段收益率 $K(1)$和 $K(2)$之和为正，且大于 $K(0,\ 2)$。

2. 考虑另外一种情况，$S(1)=90$ 美元（比问题 1 低），$S(2)=100$ 美元（与问题 1 一样），那么 $K(1)=-10\%$，$K(2)\cong 11.11\%$，它们之和再一次大于 $K(0,\ 2)=0\%$。

3. 在 $S(1)=110$ 美元，$S(2)=121$ 美元的情况下，我们有 $K(0,\ 2)=21\%$，它大于$K(1)+K(2)=10\%+10\%=20\%$。

练习 3.5

用练习 3.3 的数据，计算 $K(0,\ 2)$ 和 $K(0,\ 3)$，并分别与单时段收益之和 $K(1)+K(2)$，$K(1)+K(2)+K(3)$ 进行比较。

注 3.2

在第 2 章中，我们已经论述过确定性收益率中收益率的不可加性，强调这一点是值得的，因为人们普通将过去收益的平均值作为对将来收益的判断，但这可能会导致对信息的误解。例如，如果过去的股票价格有波动，收益率会被高估；反之则会被低估。

命题 3.1

单时段收益率与在整个期限上收益率之间的准确的关系式为

$$1+K(n,m)=(1+K(n+1))(1+K(n+2))\cdots(1+K(m))$$

证明

比较下面两个关于 $S(m)$ 的公式

$$S(m)=S(n)(1+K(n,m))$$

和

$$S(m)=S(n)(1+K(n+1))(1+K(n+2))\cdots(1+K(m))$$

这两个公式可以由定义 3.1 得出。 □

52

练习 3.6

假设 $K(1)=K(2)$，在下面三个状况下，计算单时段收益率。

状况	$S(0)$	$S(2)$
ω_1	35	41
ω_2	35	32
ω_3	35	28

练习 3.7

假设 $K(1)=10\%$ 或者 -10%；$K(0,2)=21\%$，10% 或者 -1%。计算可以使得 $K(2)$ 最多取两个不同值的状况可能的结构。

没有可加性常常很不方便。受第 2 章中对无风险证券类似的考虑启发，可以通过引入风险证券对数收益率来改变这种状况。

定义 3.2

在时间区间 $[n,m]$（更准确地说是 $[\tau n,\tau m]$）上的对数收益率 $k(n,m)$ 是由下式定义的随机变量：

$$k(n,\ m)=\ln\frac{S(m)}{S(n)}$$

单时段对数收益率可以简单地表示为 $k(n)$，即

$$k(n)=k(n-1,\ n)=\ln\frac{S(n)}{S(n-1)}$$

因此，

$$S(n)=S(n-1)e^{k(n)} \tag{3.2}$$

收益率 $K(m,\ n)$ 和对数收益率 $k(m,\ n)$ 之间的关系是显而易见的，可由比较它们的定义得出，即

$$1+K(m,\ n)=e^{k(m,\ n)}$$

因此，我们可以实现从一个收益率到另一个收益率的转换。

53

注 3.3

如果股票在时间 n 支付红利 $\mathrm{div}(n)$，且相应的价格为 $S(n)$，则对数收益率为

$$k(n)=\ln\frac{S(n)+\mathrm{div}(n)}{S(n-1)}$$

用连续的单时段对数收益率相加的方法即可计算出整个时期的收益率。

练习 3.8

对例 3.2 中的数据，计算随机变量 $k(1)$，$k(2)$和 $k(0,\ 2)$，并比较$k(0,\ 2)$ 和 $k(1)+k(2)$。

命题 3.2

如果没有红利支付，则

$$k(n,\ m)=k(n+1)+k(n+2)+\cdots+k(m)$$

证明

一方面，根据对数收益率的定义，我们有

$$S(m)=S(n)e^{k(n,m)}$$

另一方面，反复地利用单时段对数收益率，可以得到

$$S(m)=S(n)e^{k(n+1)}e^{k(n+2)}\cdots e^{k(m)}=S(n)e^{k(n+1)+k(n+2)+\cdots+k(m)}$$

比较这两个表达式就可以得到结论。 □

3.1.2 期望收益

假设收益率 K 在某一个确定区间上的概率分布是已知的，那么我们可以计算数学期望 $E(K)$，称其为期望收益。

例 3.5

假设下跌、不活跃、上涨的概率分别为$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$。如果我们预测某只股票在这些状况下的年收益率分别为－6%、4%、30%，那么年期望收益为

54

$$-6\%\times\frac{1}{4}+4\%\times\frac{1}{2}+30\%\times\frac{1}{4}=8\%$$

练习 3.9

假设下跌、不活跃、上涨的概率分别为$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{4}$。预测前两个状况下的年收益率分别为－5%和 6%。如果年期望收益为 6%，计算第三个状况下的年收益率。

练习 3.10

假设在如下三个状况下股票的价格为

状况	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
ω_1	100	110	120
ω_2	100	105	100
ω_3	100	90	100

其概率分别为$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{2}$。计算期望收益 $E(K(1))$，$E(K(2))$ 和 $E(K(0,2))$。比较 $1+E(K(0,2))$ 和 $(1+E(K(1)))(1+E(K(2)))$。

练习 3.10 表明，命题 3.1 建立的关系式不能扩展到期望收益。为此，我们需要一个附加的假设。

命题 3.3

如果单时段的收益率 $K(n+1)$，…，$K(m)$ 是不相关的，则

$$1+E(K(n,m))=(1+E(K(n+1)))(1+E(K(n+2)))$$

$$\cdots(1+E(K(m)))$$

证明

这是命题 3.1 与不相关的随机变量乘积的数学期望等于数学期望的乘积的直接结果。（注意，如果 $K(i)$ 是不相关的，那么随机变量 $1+K(i)$也是不相关的，其中 $i=n+1$，…，m。） □

55

练习 3.11

假设时间段取值为 3 个月，即 $\tau=\frac{1}{4}$，收益率 $K(1)$，$K(2)$，$K(3)$，$K(4)$独立同分布。当 3 个季度的期望收益 $E(K(0, 3))$为 12%时，计算季度期望收益 $E(K(1))$和年期望收益 $E(K(0, 4))$。

注 3.4

在对数收益的情况下，可加性可以扩展到期望收益，甚至单时段收益不是相互独立的情况，即

$$E(k(n, m))=E(k(n+1))+E(k(n+2))+\cdots+E(k(m))$$

这是因为，随机变量之和的数学期望等于数学期望之和。

注 3.5

在实践中，由于计算期望收益的需要，对每个状况下的收益和概率进行估计是困难的。实际上，可以容易地计算出过去时期上的平均收益，其结果可用于估计未来的期望收益。例如，如果最后 10 天股票价格（单位：美元）依次为 98，100，99，95，88，82，89，98，101，105，那么 9 天平均收益大概为 0.77%。而最后 4 天的平均收益大约为 6.18%（我们利用对数收益率，因为对数收益率具有可加性）。这表明结果与选择的天数有关。利用过去的价格进行预测是一个复杂的统计问题，属于计量经济学范畴，超出了本书的范围。

3.2 二叉树模型

在本节中，我们将探讨一个极其重要的股票价格模型，即二叉树模型。一方面，二叉树模型在数学上容易处理，因为它包含的参数很少，且假设在股票价格树的每个节点上具有简单且相同的结构。另一方面，它抓住了现实市场的很多特征。

二叉树模型由如下条件定义。

56

条件 3.1

股票单期收益率 $K(n)$ 是独立同分布的随机变量，满足在每个时段 n

$$K(n)=\begin{cases}u & \text{概率为 } p\\ d & \text{概率为 } 1-p\end{cases}$$

式中，$-1<d<u$；$0<p<1$。

这个条件意味着在每个时段，股票价格 $S(n)$ 上涨和下跌的因子为 $1+u$ 或者 $1+d$。如果 $S(0)$ 是正的，则不等式 $-1<d<u$ 可以保证所有的股票价格 $S(n)$ 都是正的。

假设 r 是在一个长度为 τ 的单期时段上的无风险投资收益率。

条件 3.2

在每个时段，无风险投资单期收益率 r 是相同的，并且

$$d<r<u$$

条件 3.2 说明，股票价格变动与无风险资产如债券或者银行存款有关，第 1 章中的命题 1.1 证明了这个不等式是正确的（它将在命题 4.2 中被一般化）。

因为 $\frac{S(1)}{S(0)}=1+K(1)$，条件 3.1 可以推导出随机变量 $S(1)$ 可能取两个不同的值，即

$$S(1)=\begin{cases}S(0)(1+u) & \text{概率为 } p\\ S(0)(1+d) & \text{概率为 } 1-p\end{cases}$$

练习 3.12

$S(2)$ 和 $S(3)$ 可以取多少个不同的值？取这些值的概率是多少？

扩展练习 3.12 的计算，除了可以计算出相应的概率外，还可以计算

57

出 $S(n)$ 的值。在 n 期股票价格树中，每一个具有 i 次上涨和 $n-i$ 次下跌的股票价格变动在时间 n 会产生相同的价格 $S(0)(1+u)^i(1+d)^{n-i}$。其结果是，存在 $\binom{n}{i}$ 这样的状况，每一个的概率为 $p^i(1-p)^{n-i}$，因此

$$S(n)=S(0)(1+u)^i(1+d)^{n-i}\text{，概率为}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} \tag{3.3}$$

当 $i=0, 1, \cdots, n$ 时。在时间 n，股票价格 $S(n)$ 可用 $n+1$ 个不同值描述。$S(n)$ 的概率分布由式（3.3）给出。图 3—2 显示的是 $n=10$，$p=0.5$，$S(0)=1$，$u=0.1$，$d=-0.1$ 时的概率分布。

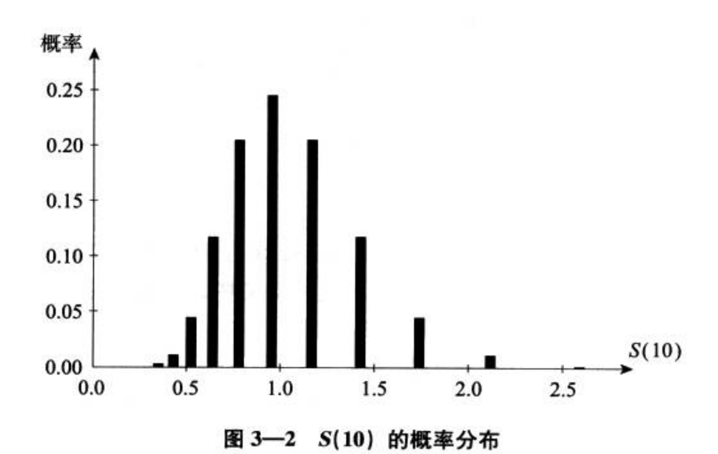


图 3—2　S(10) 的概率分布

价格向上变动的次数 i 为服从二项分布的随机变量；价格向下变动的次数 $n-i$ 也服从同样的分布。因此我们说，价格过程服从二叉树。对于 n 期二叉树所有状况的集合 Ω，在每一个时段上涨或者下跌共有 2^n 个元素。例如，两时段股票价格二叉树如图 3—3 所示；三时段二叉树如图 3—4 所示。

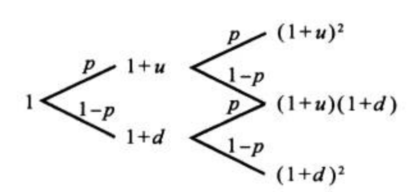


图 3—3　股票价格两时段二叉树

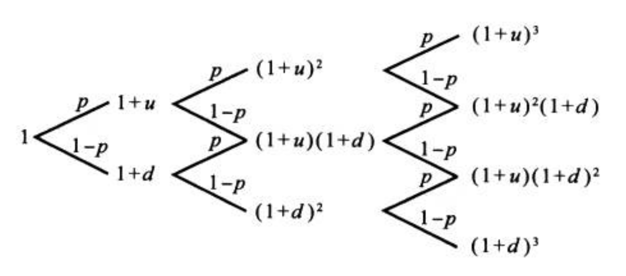


图 3—4　股票价格三时段二叉树

为简单起见，假设在这两个图中，$S(0)=1$。

练习 3.13

如果 $S(1)$ 的可能值为 87 美元和 76 美元，$S(2)$ 的最大可能值为 92 美元，计算 u 和 d。

练习 3.14

假设在连续复合之下，无风险收益率为 14%，时段 τ 为 1 个月，$S(0)=22$ 美元，$d=-0.01$，计算与条件 3.2 一致的 $S(2)$ 的中间值的范围。

练习 3.15

假设 28 美元、32 美元和 x 美元是 $S(2)$ 的可能值，计算 x。假设股票价格服从二叉树，你能画出这棵树吗？画法是否唯一？

练习 3.16

假设股票价格服从二叉树模型，$S(2)$ 的可能值是 121 美元、110 美元和 100 美元。当 $S(0)=100$ 美元时，计算 u 和 d；当 $S(0)=104$ 美元时，计算 u 和 d。

3.2.1 风险中性概率

在二叉树模型中，即使不知道股票未来的确切价值，也可以计算出股票的期望价格。然后可将这些期望价格与无风险投资进行比较。我们可以将这个简单的思想应用于衍生证券（例如期权、远期、期货）中，这些应用是广泛且令人惊奇的，我们将在以后各章研究这个问题。

59

首先，我们研究股票价格期望 $E(S(n))$ 的动态变化。当 $n=1$ 时，有

$$\begin{aligned}E(S(1)) &= pS(0)(1+u)+(1-p)S(0)(1+d)\\ &= S(0)(1+E(K(1)))\end{aligned}$$

式中，

$$E(K(1))=pu+(1-p)d$$

是单期收益的期望，下面我们将其扩展到任意的 n 的情形。

命题 3.4

当 $n=0,1,2,\cdots$ 时，股票价格的期望为

$$E(S(n))=S(0)(1+E(K(1)))^n$$

证明

因为单期收益 $K(1)$，$K(2)$，…是不相关的，于是随机变量 $1+K(1)$，$1+K(2)$，…也是不相关的，由此得出

$$\begin{aligned}E(S(n)) &= E(S(0)(1+K(1))(1+K(2))\cdots(1+K(n)))\\ &= S(0)E(1+K(1))E(1+K(2))\cdots E(1+K(n))\end{aligned}$$

$$= S(0)(1+E(K(1)))(1+E(K(2)))\cdots(1+E(K(n)))$$

因为 $K(n)$ 是同分布的，其期望相同，即

$$E(K(1)) = E(K(2)) = \cdots = E(K(n))$$

于是我们就证明了 $E(S(n))$ 的公式。 □

如果将 $S(0)$ 的金额在时间 0 投资于无风险资产，n 个时段以后，它将增长为 $S(0)(1+r)^n$。显然，要比较 $E(S(n))$ 和 $S(0)(1+r)^n$，我们只须比较 $E(K(1))$ 和 r 即可。

股票投资存在风险，因为价格 $S(n)$ 预先是未知的。一个典型的风险厌恶的投资者要求 $E(K(1))>r$，因为他认为应该有更高的回报作为对风险的补偿。反之，当 $E(K(1))<r$ 时，如果收益高的非零概率很小，收益低的非零概率很大（典型的例子是彩票，其期望收益为负），对某些投资者而言仍然有吸引力，我们称这样的投资者是风险偏好者。我们将在第 5 章讨论此问题，并给出风险的准确定义。市场的边缘情况，此时 $E(K(1))=r$，被认为是风险中性的。

60

为方便起见，我们对风险中性引入特殊的概率符号 p_* 以及相应的取数学期望的符号 E_*，满足条件

$$E_*(K(1)) = p_* u + (1-p_*)d = r \tag{3.4}$$

由式（3.4）即可推导出

$$p_* = \frac{r-d}{u-d}$$

我们称 p_* 为风险中性概率；E_* 为风险中性期望。弄清楚 p_* 是一个抽象的数学概念，它可以不等于市场的实际概率 p 很重要，即仅在风险中性的市场上有 $p=p_*$。风险中性概率 p_* 甚至于可以与真实概率 p 没有任何关系；当出于衍生证券估值目的时，我们假设合适的概率不是 p 而是 p_*。这是风险中性概率的重要应用，我们将在第 8 章中详细讨论。

练习 3.17

令 $u=\frac{2}{10}$ 和 $r=\frac{1}{10}$，研究作为 d 的函数的 p_* 的性质。

练习 3.18

证明当且仅当 $0<p_*<1$ 时，$d<r<u$。

条件（3.4）意味着

$$p_*(u-r)+(1-p_*)(d-r)=0$$

在几何意义上，这意味着把二元组（p_*，$1-p_*$）看做是平面$\mathbb{R}^2$中的向量，它垂直于坐标为（$u-r$，$d-r$）的向量。向量（$u-r$，$d-r$）表示如果投资者利用利率为 r 的现金贷款融资购买股票，持有 1 股的（单时段）投资者可能的收益或损失，如图 3—5 所示。连接点（1，0）和（0，1）线上的所有点的坐标为（p，$1-p$），其中 $0<p<1$。这些点中的一个点对应于市场的真实概率，另一个点对应于风险中性概率。

61

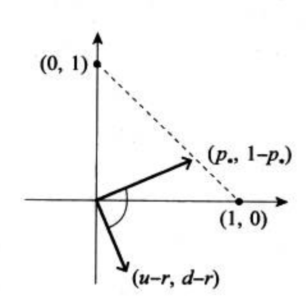


图 3—5　风险中性概率 p_* 的几何表示

风险中性概率的条件（3.4）的另一个含义如图 3—6 所示。如果把质量 p_* 和 $1-p_*$ 放在实轴上坐标为 u 和 d 的点上，那么质心在 r。

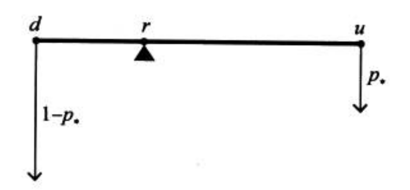


图 3—6　风险中性概率 p_* 的质心解释

3.2.2　鞅性质

由命题 3.4 可知，$S(n)$ 对于风险中性概率 p_* 的期望为

$$E_*(S(n))=S(0)(1+r)^n \tag{3.5}$$

因为 $r=E_*(K(1))$。

例 3.6

考虑一个两时段二叉树模型，$S(0)=100$ 美元，$u=0.2$，$d=-0.1$，$r=0.1$。那么，$p_*=\frac{2}{3}$为风险中性概率，两个时段之后，股票

价格的数学期望为

$$E_*(S(2))=S(0)(1+r)^2=121\ (\text{美元})$$

一个时段以后，股票价格上升和下降已知，我们要重新计算 $S(2)$ 的期望。假设一个时段以后，股票价格上升到 120 美元，在这样的情况下，可能状况集合会简化为 $S(1)=120$ 美元的那些状况，股票价格树会简化为图 3—7 中的子树。给定 $S(1)=120$ 美元，$S(2)$ 的风险中性期望将是 $\frac{2}{3}\times144+\frac{1}{3}\times108=132$ 美元，等于 $120(1+r)$。形式上，可以写成给定 $S(1)=120$ 美元，$S(2)$ 的条件期望[1]

$$E_*(S(2)\,|\,S(1)=120)=120(1+r)$$

62

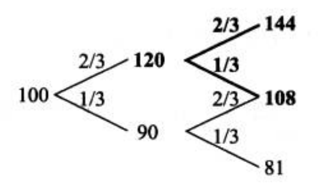


图 3—7　$S(1)=120$ 美元的子树

类似地，如果股票价格一个时段之后下降到 90 美元，则可能状况集合就会简化为 $S(1)=90$ 美元的那些状况，股票价格树会简化为图 3—8 所示的子树。给定 $S(1)=90$ 美元，则 $S(2)$ 的风险中性期望为 $\frac{2}{3}\times108+\frac{1}{3}\times81=99$ 美元，等于 $90(1+r)$，这可以写为

$$E_*(S(2)\,|\,S(1)=90)=90(1+r)$$

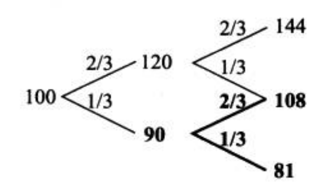


图 3—8　$S(1)=90$ 美元的子树

根据上面的两个公式，条件期望可以写成一个公式，非常容易理解，即

$$E_*(S(2)\,|\,S(1))=S(1)(1+r)$$

这个分析可扩展到二叉树模型的任何时段。假设 n 时段已经过去，股票价格变为 $S(n)$，则下一个时段以后，价格 $S(n+1)$ 的风险中性期望是什么？

63

命题 3.5

假设股票在时间 n 的价格 $S(n)$ 是已知的，$S(n+1)$ 的风险中性条件期望是

$$E_*(S(n+1)|S(n))=S(n)(1+r)$$

证明

假设 n 时段之后 $S(n)=x$，于是有

$$E_*(S(n+1)|S(n)=x)=p_*x(1+u)+(1-p_*)x(1+d)$$

因为 $S(n+1)$取值 $x(1+u)$的概率为 p_*，取值 $x(1+d)$的概率为 $1-p_*$，且由式（3.4）可知 $p_*(1+u)+(1-p_*)(1+d)=1+r$，于是有

$$E_*(S(n+1)|S(n)=x)=x(1+r)$$

对 $S(n)$ 的任意可能值 x 成立，证毕。 □

将命题 3.5 的等式的两边除以 $(1+r)^{n+1}$，我们就可以得到下面关于股票折现价格 $\widetilde{S}(n)=S(n)(1+r)^{-n}$的重要结论。

推论 3.6（鞅性质）

对任意的 $n=0,1,2,\cdots$，有

$$E_*(\widetilde{S}(n+1)|S(n))=\widetilde{S}(n)$$

则股票的折现价格 $\widetilde{S}(n)$ 在风险中性概率之下会形成一个**鞅**，风险中性概率 p_* 被认为是**鞅概率**。

练习 3.19

假设 $r=0.2$，给定 $S(2)=110$ 美元，计算 $S(3)$的风险中性条件期望。

3.3 其他模型

在第一次阅读时，本节可以跳过，因为本节的主要思想与本章中论述的模型无关。

3.3.1 三叉树模型

64

二叉树模型的一个自然推广是将单时段收益 $K(n)$ 的可能值的范围

扩大到三个。这个想法产生于在给定的时段，不仅允许股票价格向上变动、向下变动，还可以取中间值。

条件 3.3

单时段的收益 $K(n)$ 是不相关的随机变量，

$$K(n)=\begin{cases} u & \text{概率为 } p \\ n & \text{概率为 } q \\ d & \text{概率为 } 1-p-q \end{cases}$$

式中，$d<n<u$；$0<p$，q，$p+q<1$。

这意味着，u 和 d 向上和向下的价格变动和以前一样，而 n 表示中间的价格变动。对于典型的中性情况，$n=0$。

条件 3.4

无风险投资的单时段收益率在每个时间段都是相同的，而且

$$d<r<u$$

因为$\frac{S(1)}{S(0)}=1+K(1)$，条件 3.3 意味着 $S(1)$ 取三个不同值，有

$$S(1)=\begin{cases} S(0)(1+u) & \text{概率为 } p \\ S(0)(1+n) & \text{概率为 } q \\ S(0)(1+d) & \text{概率为 } 1-p-q \end{cases}$$

练习 3.20

随机变量 $S(2)$ 可以取多少个不同的值？这些值是多少？取值概率是多少？

对风险中性概率 p_*，q_*，条件 $E_*(K(n))=r$ 可以记为

$$p_*(u-r)+q_*(n-r)+(1-p_*-q_*)(d-r)=0 \tag{3.6}$$

65

三元组（p_*，q_*，$1-p_*-q_*$）作为$\mathbb{R}^3$ 中的向量，垂直于坐标为（$u-r$，$n-r$，$d-r$）的向量，该向量表示，用现金贷款融资购买股票的投资者持有 1 股股票单时段可能的收益和损失，这意味着（p_*，q_*，$1-p_*-q_*$）位于三角形$\{(a, b, c): a,b,c\geqslant 0, a+b+c=1\}$上，和垂直于给定向量（$u-r$，$n-r$，$d-r$）的平面正交，如图 3—9 所示。条件 3.4 保证交集是非空的，因为包含向量（$u-r$，$n-r$，$d-r$）的线不通过正卦限。在这种情况下，存在无穷多个风险中性概率，这个交集是一个线段。

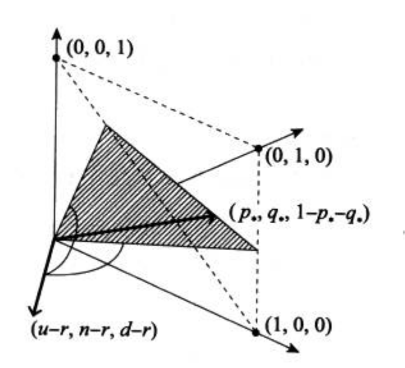


图 3—9　风险中性概率 p_*，q_* 的几何解释

对风险中性概率条件（3.6）的另一个解释如图 3—10 所示，如果质量 p_*，q_*，$1-p_*-q_*$ 放在实轴上，坐标分别为 u，n 和 d 点，那么质心在 r。

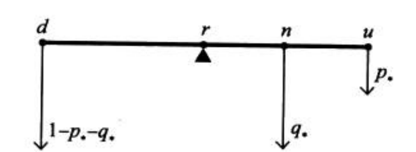


图 3—10　风险中性概率 p_*，q_* 的质心解释

练习 3.21

假设 $u=0.2$，$n=0$，$d=-0.1$，$r=0$，计算所有的风险中性概率。

3.3.2　连续时间极限

66

离散时间和离散价格模型有显而易见的缺陷，明显地限制了资产价格的变动范围，而且会限制这些变动发生的时间的集合，在本节中，我们概括地论述一种不受这种限制的方法。这种方法可从二叉树模型开始，通过取连续时间极限得到。

我们考虑时段 $\tau=\frac{1}{N}$ 的二叉树模型序列。令 $N\to\infty$，对于所有逼近序列中的二叉树模型，假设每一时段股票价格向上变动和向下变动的概率都是 $\frac{1}{2}$。

在这种情况下，利用对数收益率比较方便：

$$k(n)=\ln(1+K(n))=\begin{cases}\ln(1+u) & \text{概率为}\frac{1}{2}\\ \ln(1+d) & \text{概率为}\frac{1}{2}\end{cases}$$

在单时段上的无风险收益率可以用等价的连续复合利率 r 代替，于是在长度为 τ 的时段的收益将是 $e^{r\tau}$。

在从时间 0 到时间 1 的单位时间区间，包含 N 个长度为 τ 的时段。假设 m 为在单位时间区间上的对数收益率 $k(1)+k(2)+\cdots+k(N)$ 的期望；α 为标准差；对数收益率 $k(1)$，$k(2)$，…，$k(N)$ 是独立同分布的，并且$K(1)$，$K(2)$，…，$K(N)$也是独立同分布的，由此可以得出，对每一个 $n=1$，2，…，N，

$$\begin{aligned}m&=E(k(1)+k(2)+\cdots+k(N))\\&=E(k(1))+E(k(2))+\cdots+E(k(N))=NE(k(n))\\ \sigma^2&=\mathrm{Var}(k(1)+k(2)+\cdots+k(N))\\&=\mathrm{Var}(k(1))+\mathrm{Var}(k(2))+\cdots+\mathrm{Var}(k(N))\\&=N\mathrm{Var}(k(n))\end{aligned}$$

这意味着 $k(n)$ 有期望$\frac{m}{N}=m\tau$ 和标准差$\sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}=\sigma\sqrt{\tau}$，因此 $k(n)$ 的两个可能值必是

$$\begin{aligned}\ln(1+u)&=m\tau+\sigma\sqrt{\tau}\\ \ln(1+d)&=m\tau-\sigma\sqrt{\tau}\end{aligned}\tag{3.7}$$

练习 3.22

当 $u=0.02$，$d=-0.01$，$\tau=\frac{1}{12}$时，计算 m 和σ。

67

引入一个相互独立的随机变量序列 $\xi(n)$，每一个随机变量取两个值，即

$$\xi(n)=\begin{cases}+\sqrt{\tau} & \text{概率为}\frac{1}{2}\\ -\sqrt{\tau} & \text{概率为}\frac{1}{2}\end{cases}$$

我们可以证明对数收益率为

$$k(n)=m\tau+\sigma\xi(n)$$

练习 3.23

计算 $\xi(n)$ 和 $k(n)$ 的期望和方差。

练习 3.24

用 m，σ，τ，$\xi(1)$ 和 $\xi(2)$ 表示 $S(1)$ 和 $S(2)$。

下面我们引入一个重要的随机变量序列 $w(n)$，称其为**对称的随机漫步**（symmetric random walk），满足

$$w(n)=\xi(1)+\xi(2)+\cdots+\xi(n)$$

并且 $w(0)=0$。显然 $\xi(n)=w(n)-w(n-1)$，于是可以认为 $\xi(n)$ 是 $w(n)$ 的增量。

从现在开始，对 $t=\tau n$，我们常常用 $S(t)$ 和 $w(t)$ 代替 $S(n)$ 和 $w(n)$，其中 $n=1$，2，…。

命题 3.7

股票在时间 $t=\tau n$ 的价格为

$$S(t)=S(0)\exp(mt+\sigma w(t))$$

证明

利用式（3.2），有

$$\begin{aligned}S(t)=S(n\tau)&=S(n\tau-\tau)\mathrm{e}^{k(n)}\\&=S(n\tau-2\tau)\mathrm{e}^{k(n-1)+k(n)}\\&=\cdots=S(0)\mathrm{e}^{k(1)+\cdots+k(n)}\\&=S(0)\mathrm{e}^{mn\tau+\sigma(\xi(1)+\cdots+\xi(n))}\\&=S(0)\mathrm{e}^{mt+\sigma w(t)}\end{aligned}$$

证毕。 □

68

为了取连续时间极限，对于很小的 x 值，我们利用近似表达式，即

$$\mathrm{e}^{x}\approx1+x+\frac{1}{2}x^{2}$$

于是有

$$\frac{S(n\tau+\tau)}{S(n\tau)}=\mathrm{e}^{k(n+1)}\approx1+k(n+1)+\frac{1}{2}k(n+1)^{2}$$

然后，我们计算

$$k(n+1)^{2}=(m\tau+\sigma\xi(n+1))^{2}=\sigma^{2}\tau+\cdots$$

这里我们略去了所有的 τ 的幂次高于 1 的项，因为当 τ 很小时，这些项更小。接下来，

$$\frac{S(n\tau+\tau)}{S(n\tau)}\approx1+m\tau+\sigma\xi(n+1)+\frac{1}{2}\sigma^{2}\tau$$

$$=1+\left(m+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau+\sigma\xi(n+1)$$

于是有

$$S(n\tau+\tau)-S(n\tau)\approx(m+\frac{1}{2}\sigma^2)S(n\tau)\tau+\sigma S(n\tau)\xi(n+1)$$

因为 $\xi(n+1)=w(n\tau+\tau)-w(n\tau)$，我们就可以得到描述股价动态变化的近似方程

$$S(t+\tau)-S(t)\approx\left(m+\frac{1}{2}\sigma^2\right)S(t)\tau+\sigma S(t)(w(t+\tau)-w(t)) \quad (3.8)$$

式中，$t=n\tau$。这个近似方程的解 $S(t)$ 由命题 3.7 中的公式给出。

对于任意 $N=1, 2, \cdots$，我们考虑具有时段长度为 $\tau=\frac{1}{N}$ 的二叉树模型。假设 $S_N(t)$ 为相应的股票价格；$w_N(t)$ 为相应的对称随机漫步，其增量为 $\xi_N(t)=w_N(t)-w_N\left(t-\frac{1}{N}\right)$，其中 $t=\frac{n}{N}$ 为 n 时段以后的时间。

练习 3.25

计算 $w_N(t)$ 的数学期望和方差，其中 $t=\frac{n}{N}$。

69

我们将利用中心极限定理[2]得到当 $n\to\infty$ 时，随机漫步 $w_N(t)$ 的极限。为此，我们令

$$x(n)=\frac{k(n)-m\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

对每一个 $n=1, 2, \cdots$，它是独立同分布随机变量序列，序列中的每一个随机变量的期望为 0；方差为 1。中心极限定理暗含，当 $n\to\infty$ 时，按分布

$$\frac{x(1)+x(2)+\cdots+x(n)}{\sqrt{n}}\to X$$

X 为标准正态分布随机变量（均值为 0，方差为 1）。

固定每个 $t>0$，因为随机漫步 w_N 只是针对定义在时段 $\tau=\frac{1}{N}$ 的整数倍上的离散时间，于是我们考虑 $w_N(t_N)$，其中 t_N 是 $\frac{1}{N}$ 的整数倍，最接近 t。很明显，Nt_N 是整数，对每一个 N 成立，我们可以记

$$w_N(t_N)=\sqrt{t_N}\,\frac{x(1)+x(2)+\cdots+x(Nt_N)}{\sqrt{Nt_N}}$$

当 $N\to\infty$时，我们有 $t_N\to t$，$Nt_N\to\infty$，于是按分布，有

$$w_N(t_N)\to W(t)$$

式中，$W(t)=\sqrt{t}X$。最后的等式意味着 $W(t)$ 服从均值为零、方差为 t 的正态分布。

根据中心极限定理，仅对单个固定的时间 $t>0$ 就可以得出这个结论。这个结论可以扩展到对所有的时间 $t\geqslant 0$ 同时成立的极限，但这超出了本书的范围。这个极限 $W(t)$ 称为**维纳过程**（Wiener process）（或者**布朗运动**（Brownian motion）），它继承了随机漫步的许多性质，例如：

1. $W(0)=0$，对应于 $w_N(0)=0$。
2. $E(W(t))=0$，对应于 $E(w_N(t))=0$（见练习 3.25 的解答）。
3. $\mathrm{Var}(W(t))=t$，其离散变型 $\mathrm{Var}(w_N(t))=t$（见练习 3.25 的解答）。
4. 增量 $W(t_3)-W(t_2)$ 和增量 $W(t_2)-W(t_1)$ 是独立的，对 $0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant t_3$，增量 $w_N(t_3)-w_N(t_2)$ 和增量 $w_N(t_2)-w_N(t_1)$ 是独立的。

70

5. $W(t)$ 服从均值为零、方差为 t 的正态分布，即密度函数为 $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}}$。这与 $w_N(t)$的分布有关。后者不是正态的，但根据中心极限定理，在极限的意义之下，接近于正态分布。

$W(t)$和 $w_N(t)$的一个重要差别是，$W(t)$适用于所有的 $t\geqslant 0$；而 $w_N(t)$ 中的时间是离散的（$t=\frac{n}{N}$，$n=0, 1, 2, \cdots$）。

当 $N\to\infty$时，由 $S_N(t)$ 取极限得到的价格过程我们用 $S(t)$ 表示，而$S_N(t)$ 满足利用特定代换的近似方程（3.8），即

$$\begin{aligned}&S_N(t+\frac{1}{N})-S_N(t)\\ &\approx\left(m+\frac{1}{2}\sigma^2\right)S_N(t)\frac{1}{N}+\sigma S_N(t)\left(w_N(t+\frac{1}{N})-w_N(t)\right)\end{aligned}$$

连续时间的股票价格 $S(t)$ 满足的方程形式为

$$\mathrm{d}S(t)=\left(m+\frac{1}{2}\sigma^2\right)S(t)\mathrm{d}t+\sigma S(t)\mathrm{d}W(t) \tag{3.9}$$

式中，$\mathrm{d}S(t)=S(t+\mathrm{d}t)-S(t)$，$\mathrm{d}W(t)=W(t+\mathrm{d}t)-W(t)$ 是在无穷小的时间区间 $\mathrm{d}t$ 上的增量。解的显式公式在离散时间情况下类似于

$$S_N(t)=S_N(0)\exp(mt+\sigma w_N(t))$$

以及在连续时间情况下，

$$S(t)=S(0)\exp(mt+\sigma W(t))$$

因为 $W(t)$ 服从均值为 0，方差为 t 的正态分布，于是可以得出$\ln S(t)$ 服

从均值为$\ln S(0)+mt$，方差为$\sigma^2 t$的正态分布。因此，我们说连续时间股票价格$S(t)$服从**对数正态分布**，称σ为价格$S(t)$的**波动率**（volatility）。当$t=10$，$S(0)=1$，$m=0$，$\sigma=0.1$时，$S(t)$分布的密度函数如图3—11所示，可以与离散时间的图3—2进行比较。

71

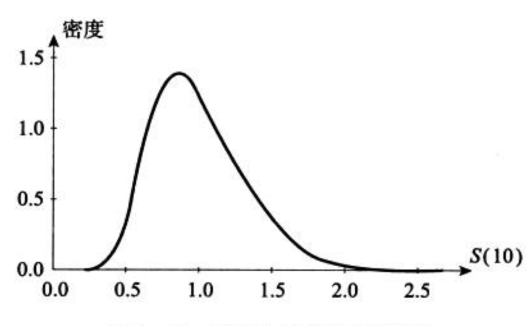


图3—11　S(10)分布的密度函数

注3.6

以上我们仅用与离散时间情况的类比，介绍了式（3.9）以及增量$dS(t)$，$dW(t)$和dt。在**随机分析**（stochastic calculus）中，我们将对它们进行精确的论述。随机分析在现代数理金融学中有基本的应用。特别地，式（3.9）是著名的**随机微分方程**的例子。

【注释】

[1] 给定事件A，$P(A)\neq 0$，随机变量ξ的条件期望定义为$E(\xi|A)=\frac{E(\xi 1_A)}{P(A)}$，其中$1_A$为示性随机变量，在$A$中为1，在$A$的余集中为0。

[2] 例如，参见Capiński and Zastawniak（2001）。

第 4 章　离散时间市场模型

73　我们已经论述了股票价格动态模型，现在我们将给出并进一步推广和深化我们在第 1 章引入的一些想法。特别地，我们将重新公式化并扩展我们在第 1 章中提及的数理金融的基本概念和假设。

与第 3 章一样，时间按固定的长度 τ 推移。对于许多依赖于时间的问题，我们用符号 n 代替第 n 个时段的时间 $t=n\tau$。

4.1 股票和货币市场模型

假设有 m 种可交易的风险资产，且这些资产为股票，它们在时间 $n=0, 1, 2, \cdots$ 的价格用 $S_1(n)$，…，$S_m(n)$ 表示。另外，投资者可投资于无风险资产，即投资于货币市场，除非另作说明，我们在无风险资产上的初始投资是一个本国货币单位，即 $A(0)=1$。而在例题和练习中，我们经常取 $A(0)=100$，这是为了方便。因为货币市场账户可利用债券产生（见第 2 章），我们经常认为，无风险投资是债券头寸，并发现把 $A(n)$ 看做债券在时间 n 的价格是很方便的。

风险资产 1，…，m 的头寸分别用 x_1，x_2，…，x_m 表示，无风险头寸用 y 表示，投资者在时间 n 持有的这些头寸的价值为 74

$$V(n)=\sum_{j=1}^{m}x_jS_j(n)+yA(n) \tag{4.1}$$

第 1 章的假设 1.1～1.5 适用于这个一般情形。引入这些假设的目的和对这些假设的解释与第 1 章相同，这里一个很自然的变化是从一个时段到多个时段，从一个风险资产到多个风险资产。

假设 4.1（随机性）

对任意 $n=1, 2, \cdots$，股票的未来价格 $S_1(n), \cdots, S_m(n)$ 是随机变量，无风险证券的未来价格 $A(n)$ 是已知数。

假设 4.2（价格的正性）

所有股票和债券的价格是严格正的，即

$$S(n)>0, A(n)>0 \quad n=0, 1, 2, \cdots$$

假设 4.3（可分性、流动性和卖空）

一个投资者买、卖和持有的每种股票的数量 $x_k(k=1, 2, \cdots, m)$ 和持有无风险证券的头寸 y 可以是任意数，即可以是整数、分数、正数、负数或者零。一般地，

$$x_1, x_2, \cdots, x_m, y\in\mathbb{R}$$

假设 4.4（偿付能力）

在所有的时间，投资者的财富是非负的，即

$$V(n)\geqslant 0 \quad n=0, 1, 2, \cdots$$

假设 4.5（离散单元价格）

对每一个 $n=0, 1, 2, \cdots$，股票价格 $S_1(n), \cdots, S_m(n)$ 是仅取有限个值的随机变量。

4.1.1 投资策略

75 由于可卖出某些资产并将所得投资于其他资产，所以投资者持有的风险资产和无风险资产的头寸在任何时间段都可能改变。在现实生活中，可能变现资产组合，取出现金用于消费，或在资产组合中注入资金。然而，我们将假设在模型中没有发生消费和资金注入，使模型尽可能地简单。

任何投资者在改变资产组合，决定购买或者卖出多少资产时，都要根据当前可以利用的信息作出决策。我们将排除投资者可以预见未来的可能性，也排除其利用内幕信息交易的可能性。而所有的关于市场的历史信息和特殊的交易决策执行瞬间的信息都可以免费利用。

例 4.1

令 $m=2$，并假设在一个确定的市场状况中，有

$$S_1(0)=60 \qquad S_1(1)=65 \qquad S_1(2)=75$$
$$S_2(0)=20 \qquad S_2(1)=15 \qquad S_2(2)=25$$
$$A(0)=100 \qquad A(1)=110 \qquad A(2)=121$$

在时间 0，用初始财富 $V(0)=3\ 000$ 美元投资于 20 股第一种股票、65 股第二种股票和 5 份债券，即 $x_1(1)=20$，$x_2(1)=65$，$y(1)=5$ 构成的资产组合。为了符号上的方便，我们宁可用 1 而不用 0 作为$x_1(1)$，$x_2(1)$ 和 $y(1)$ 的自变量来表示第一个时段持有的资产组合。资产组合的价值为 $V(1)=20\times65+65\times15+5\times110=2\ 825$ 美元。此时，可以通过买卖资产而改变资产的数量，只要总价值保持 2 825 美元。例如，我们将构建一个由 15 股第一种股票、94 股第二种股票和 4 份债券构成的新资产组合，即 $x_1(2)=15$，$x_2(2)=94$，$y(2)=4$，在第二个时段持有。这个资产组合在时间 2 的价值为 $V(2)=15\times75+94\times25+4\times121=3\ 959$ 美元。股票和债券的头寸可以再次调整，只要总价值保持 3 959 美元，如此继续下去。然而，如果原来的组合不调整，则在时间 1 的价值为 2 825 美元，在时间 2 的价值为 3 730 美元。

定义 4.1

76

资产组合是一个向量 $(x_1(n), \cdots, x_m(n), y(n))$，它等同于投资者在时间 $n-1$ 和时间 n 之间持有的股票和债券的数量。以 $n=1, 2\cdots$为标记的资产组合序列称为**投资策略**。在时间 $n\geqslant1$，投资者的财富或者策略的价值为

$$V(n)=\sum_{j=1}^{m}x_j(n)S_j(n)+y(n)A(n)$$

在时间 $n=0$，**初始财富**为

$$V(0)=\sum_{j=1}^{m}x_j(1)S_j(0)+y(1)A(0)$$

在例 4.1 中我们已经看到，在任意时期可以通过买入或者卖出某些资产来调整资产组合，只要资产组合的价值保持不变。

定义 4.2

如果在时间 $n \geqslant 1$ 构建的在下一个时段 $n+1$ 持有的资产组合完全是由当前的财富 $V(n)$ 融资，则称投资策略是**自融资的**（self financing）。有

$$\sum_{j=1}^{m} x_j(n+1)S_j(n) + y(n+1)A(n) = V(n) \tag{4.2}$$

例 4.2

假设股票和债券的价格与例 4.1 相同。初始财富为 3 000 美元，投资者购买第一种股票 18.22 股，即 $x_1(1)=18.22$；卖空第二种股票 16.81 股，即 $x_2(1)=-16.81$；购买债券 22.43 份，即 $y(1)=22.43$。那么在时间 1，这个资产组合的价值为 $V(1)=18.22\times 65-16.81\times 15+22.43\times 110=3\ 399.45$ 美元，投资者可以从股票价格下跌的卖空中获利。这个例子表明，允许资产组合中资产的数量为分数和负数。

我们对于 $x_1(n)$，…，$x_m(n)$，$y(n)$ 不附加任何限制。它们可以取非整数值的事实被认为是具有可分性的。负 $x_j(n)$ 意味着卖空股票 j（换言之，取得股票 j 的空头头寸），$y(n)$ 为负数对应于借入现金（在货币市场上取得空头头寸，例如发行债券或者卖出债券）。这些数量的多少没有限制意味着市场是流动的，即在任何时间，每一种资产买入和卖出的数量是任意的。

77

在实践中，为控制卖空，证券交易所可以对卖空采取某些措施加以控制。典型的做法是，投资者必须支付卖空数量的一定百分比作为证券回补可能损失的保证金。如果损失超过保证金，头寸将被平仓。保证金给资产组合增加了负担，特别当保证金不产生利息时。然而，此类限制不涉及为金融机构工作的持有大量小投资者存入的股票的交易商，它们可以内部借入这些股份代替卖空。

例 4.3

我们继续假设股票价格的状况同例 4.1。假设第一种股票的 20 股被卖空，即 $x_1(1)=-20$。投资者将获得 $20\times 60=1\ 200$ 美元现金，但支付证券保证金，比如 50%即 600 美元。一个时段以后，他将损失 $20\times 65-1\ 200=100$ 美元。这将从保证金中扣除，并且头寸可通过提取余额 $600-100=500$ 美元而结束。* 另一方面，如果卖空第二种股票 60 股，即 $x_2(1)=-60$，一个时期以后，投资者将获得 $1\ 200-60\times 15=300$ 美元利润。结算头寸，最终财富为 $600+300=900$ 美元。在这两种情况下，最终的余额应该减去 $600\times 0.1=60$ 美元，这是因为如果将保证金投资于货币市场，保证金将获得利息。

* 原文此处为 600－100＝400 美元，有误。现改为 500 美元。——译者注

投资者在时间 n 构造资产组合时，不知道股票的未来价格。特别地，不允许内幕交易。投资决策只能依据到投资作出时为止的市场表现。这种情况反映在如下定义中。

定义 4.3

如果对每一个 $n=0$，1，2，…在时间 n 构成的资产组合（$x_1(n+1)$，$x_2(n+1)$，…，$x_m(n+1)$，$y(n+1)$）仅依赖于直到当前包括在时间 n 发生的市场树的节点，则称投资策略是**可预测的**（predictable）。

78

下面的命题可以证明无风险资产的头寸总可以由当前财富和风险资产头寸决定。

命题 4.1

给定初始财富 $V(0)$ 和可预测的风险资产头寸序列（$x_1(n)$，…，$x_m(n)$），$n=1$，2，…，总可以计算出无风险资产序列 $y(n)$，使得（$x_1(n)$，…，$x_m(n)$，$y(n)$）是可预测的自融资投资策略。

证明

令

$$y(1)=\frac{V(0)-x_1(1)S_1(0)-\cdots-x_m(1)S_m(0)}{A(0)}$$

然后计算

$$V(1)=x_1(1)S_1(1)+\cdots+x_m(1)S_m(1)+y(1)A(1)$$

于是有

$$y(2)=\frac{V(1)-x_1(2)S_1(1)-\cdots-x_m(2)S_m(1)}{A(1)}$$

$$V(2)=x_1(2)S_1(2)+\cdots+x_m(2)S_m(2)+y(2)A(2)$$

如此继续下去，这显然就可以定义一个自融资策略，这个策略是可预测的，因为 $y(n+1)$ 可用时间 n 已知的债券和股票价格表示。 □

练习 4.1

假设投资者在时间 1 和时间 2 的策略是自融资的可预测策略，计算持有的债券数 $y(1)$ 和 $y(2)$。其初始财富为 $V(0)=200$ 美元，风险资产头寸如下：

$$x_1(1)=35.24 \qquad x_1(2)=-40.50$$
$$x_2(1)=24.18 \qquad x_2(2)=10.13$$

如果各状况的资产价格同例 4.1，计算策略在时间 1 的价值 $V(1)$以及在时间 2 的价值 $V(2)$。

例 4.4

首先，假设各状况的股票和债券价格与例 4.1 中一样。如果将 $V(0)=100$ 美元投资于资产组合：$x_1(1)=-12$，$x_2(1)=31$，$y(1)=2$，则将导致无偿付能力，因为这个资产组合在时间 1 的值是负数，即 $V(1)=-12\times 65+31\times 15+2\times 110=-95$ 美元。

79

违背假设 4.4，在现实中不可能构建这样的资产组合。不允许空头头寸，除非在任意时间、任何状况（如果有必要，可以卖出组合中的其他资产获得现金）都能够结算。这意味着在所有的时间，投资者的财富都是非负的。

定义 4.4

投资策略称为是**可允许的**（admissible），如果它是自融资的、可预测的，且对每一个 $n=0$，1，2，…，

$$V(n)\geqslant 0$$

的概率为 1。

练习 4.2

考虑由一种无风险资产和一种风险资产构成的市场，并且 $A(0)=10$ 美元；$A(1)=11$ 美元；$S(0)=10$ 美元；$S(1)=13$ 美元或 9 美元。在 x，y 平面上画出所有包含风险头寸 x 和无风险头寸 y 的单期可允许的资产组合（x，y）。

4.1.2 无套利原则

我们将把金融中所有数学模型的基本原则公式化。可将第 1 章中的简单的单期无套利原则一般化为具有多个时段和多种风险资产的模型。而对于足以描述单期情况的资产组合概念，在一般的情况下，我们必须利用构成可允许投资策略的资产组合序列，这是因为投资者可能会在每一个时段调整头寸。

假设 4.6（无套利原则）

不存在可允许的策略，使得

$V(0)=0$，$V(n)>0$ 具有正概率，对某一个 $n=1, 2, \cdots$。

练习 4.3

80

如果存在自融资的可预测的投资策略，其初始值 $V(0)=0$，终值 $0\neq V(2)\geqslant 0$，使得 $V(1)<0$ 具有正的概率，证明违背无套利原则。

练习 4.3 中的投资策略明显违背了偿付能力假设，因为 $V(1)$ 可能是负的。事实上，这个假设对于论证无套利原则是非必要的。当存在可预测的自融资策略（可能违背假设 4.4）对于 $n>0$ 使得 $V(0)=0$ 且 $0\neq V(n)\geqslant 0$ 时，可找到能实现套利的可允许的策略。

练习 4.4

考虑具有一种无风险资产和一种服从二叉树模型的风险资产的市场，假设股票价格上涨时，你能预测下个时期股票价格会下跌，计算自融资（但不必是可预测的）投资策略，使得 $V(0)=0, V(1)\geqslant 0$ 且 $0\neq V(2)\geqslant 0$。

这个练习暗示，可预测性在无套利原则中是基本性假设。如果一个投资者能够预测将来的股票价格行为（这里，如果股票价格在一个时期下跌，你能预测出在下一个时期会如何变化），他总可以找到合适的投资策略以获得无风险利润。

练习 4.5

考虑一个具有一种无风险资产和一种风险资产的市场，无风险资产的价格为 $A(0)=100$ 美元；$A(1)=110$ 美元；$A(2)=121$ 美元，风险资产的价格有以下三个可能的状况，

状况	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
ω_1	100	120	144
ω_2	100	120	96
ω_3	100	90	96

下述情况是否存在套利机会？(a) 不存在卖空限制；(b) 风险资产不允许卖空。

练习 4.6

81

假设股票和债券的价格与练习 4.5 相同，允许卖空，但资产组合中每一种资产的数量必须是整数，是否存在套利策略？

练习 4.7

假设股票和债券的价格与练习 4.5 相同，允许卖空，但在交易时交易成本是交易量的 5%，是否存在套利策略？

4.1.3 应用于二叉树模型

我们将看到，在多期二叉树模型中，条件 3.2 等价于没有套利机会。

命题 4.2

当且仅当 $d<r<u$ 时，二叉树模型没有套利机会。

证明

我们从单期二叉树开始，然后将它用于构建多期情况模型中的一个块。

单期（one step）。假设 $r\leqslant d$，如果是这样，则

- 以无风险利率借入 1 美元。
- 购买$\frac{1}{S(0)}$股股票。

即构造一个资产组合：$x=\frac{1}{S(0)}$，$y=-1$，其价值 $V(0)=0$。一个时期以后，$S(1)=S(0)(1+d)$，$V(1)=-r+d\geqslant 0$，或者 $S(1)=S(0)(1+u)$，$V(1)=-r+u>0$，则存在套利机会。

假设 $u\leqslant r$，在这种情况下：

- 购买 1 份债券。
- 卖空$\frac{1}{S(0)}$股股票。

其结果是，构造资产组合：$x=-\frac{1}{S(0)}$，$y=1$。我们有初始值 $V(0)=0$。一个时期以后，如果股票价格上涨，则资产组合的价值 $V(1)=r-u\geqslant 0$；如果股票价格下跌，则 $V(1)=r-d>0$，仍然存在套利机会。

最后，假设 $d<r<u$。对某一个实数 a，每一个使得 $V(0)=0$ 的资产组合必须是$x=\frac{a}{S(0)}$，$y=-a$。考虑如下三种情况：

82

(1) $a=0$（无现金、无股票的平凡资产组合（trivial portfolio）），则 $V(1)=0$。

(2) $a>0$（贷款投资于股票），则如果股票价格下跌，$V(1)=a(d-r)<0$。

(3) $a<0$（用卖空股票融资取得债券多头头寸），在这种情况下，如果股票价格上涨，则 $V(1)=a(u-r)<0$。

显然，当 $d<r<u$ 时，不存在套利机会。

于是，我们就证明了在单期情况下，当且仅当没有套利机会时，$d<r<u$。

多期 (several steps)。令 $d<r<u$，假设存在套利机会。可以认为股票价格树是单期子树的集合，如图 4—1 所示。我们取使得 $V(n)\neq 0$ 的最小的 n，就可以找到一个单期子树，在其树根有 $V(n-1)=0$。在这个树根生长出的每一个节点，有 $V(n)\geqslant 0$，且有一个或者更多个节点使得 $V(n)>0$。如果 $d<r<u$，根据单期情况，这是不可能的，导致矛盾。

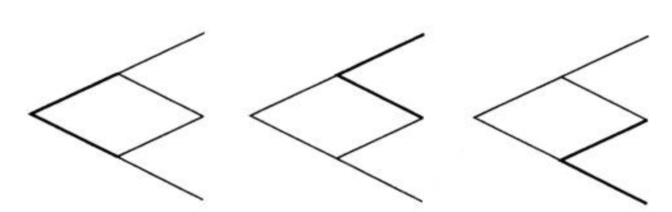


图 4—1 在二期二叉树模型中的单期子树

相反，假设多期的二叉树模型不存在套利机会，那么对任意使得 $V(0)=0$ 的投资策略，必有 $V(n)=0$ 对任意 n 成立，特别地，$V(1)=0$。由单期情况的论证，可以得到 $d<r<u$。 □

我们将用无套利原则和风险中性概率之间的基本关系的简短讨论结束本章。首先，我们注意到，在二叉树模型中，无套利等价于存在风险中性概率。

命题 4.3

当且仅当存在风险中性概率 p_*，使得 $0<p_*<1$ 时，二叉树模型不允许存在套利机会。

83

证明

这是练习 3.18 和命题 4.2 的直接结论。 □

4.1.4 资产定价基本定理

读者第一次阅读本书时，本节可以略过。在本节我们转向研究假设 4.1～4.5 的一般情况。

我们已经知道，二叉树模型中的股票的折现价格在风险中性概率下可以构成鞅，参见命题 3.5 和推论 3.6。下面我们将这些结论扩展到任意的离散模型。

定理 4.4（资产定价基本定理）

无套利原则等价于存在满足如下条件的概率 P_*，在状况构成的集合 Ω 上满足 $P_*(\omega)>0$ 对任意状况 $\omega\in\Omega$ 成立，且折现价格 $\widetilde{S}_j(n)=\dfrac{S_j(n)}{A(n)}$ 满足

$$E_*(\widetilde{S}_j(n+1)\mid S(n))=\widetilde{S}_j(n) \tag{4.3}$$

对于任意 $j=1,\cdots,m$ 和 $n=0,1,2,\cdots$成立，这里 $E_*(\cdot\mid S(n))$ 表示已知时间 n 的股票价格 $S(n)$ 对于概率 P_* 的条件期望。

资产定价基本定理的证明技巧性很强，我们在这里就不证明了。

定义 4.5

如果随机变量序列 $X(0)$，$X(1)$，$X(2)$，…使得

$$E_*(X(n+1)\mid S(n))=X(n)$$

对每一个 $n=0,1,2\cdots$成立，我们称它对于概率 P_* 构成鞅。

条件（4.3）可以说成股票折现价格 $\widetilde{S}_j(0)$，$\widetilde{S}_j(1)$，$\widetilde{S}_j(2)$，…对于概率 P_* 构成鞅，称 P_* 为状况集合 Ω 上的风险中性或者鞅概率，称 E_* 为风险中性期望或者鞅期望。

例 4.5

84

假设 $A(0)=100$ 美元；$A(1)=110$ 美元；$A(2)=121$ 美元，且股票价格有如下 4 种可能状况：

状况	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
ω_1	90	100	112
ω_2	90	100	106
ω_3	90	80	90
ω_4	90	80	80

股票价格树如图 4—2 所示。我们用在每个节点的分支概率 p_*，q_*，r_* 表示风险中性概率 P_*，关于 $\widetilde{S}(n)=\dfrac{S(n)}{A(n)}$的条件（4.3）可写成如下三个方程，树的每一个节点对应一个方程，即

$$\frac{100}{110}p_*+\frac{80}{110}(1-p_*)=\frac{90}{100}$$

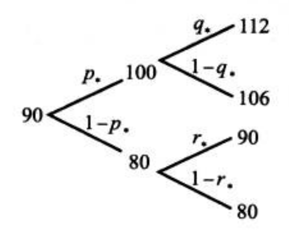


图 4—2　例 4.5 中的股票价格二叉树

$$\frac{112}{121}q_* + \frac{106}{121}(1-q_*) = \frac{100}{110}$$

$$\frac{90}{121}r_* + \frac{80}{121}(1-r_*) = \frac{80}{110}$$

计算这些方程，得到

$$p_* = \frac{19}{20} \quad q_* = \frac{2}{3} \quad r_* = \frac{4}{5}$$

每一个状况（通过这个树的每个路径）相应的风险中性概率计算如下：

$$P_*(\omega_1) = p_* q_* = \frac{19}{20} \times \frac{2}{3} = \frac{19}{30}$$

$$P_*(\omega_2) = p_*(1-q_*) = \frac{19}{20} \times \left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{19}{60}$$

$$P_*(\omega_3) = (1-p_*)r_* = \left(1-\frac{19}{20}\right) \times \frac{4}{5} = \frac{1}{25}$$

$$P_*(\omega_4) = (1-p_*)(1-r_*) = \left(1-\frac{19}{20}\right) \times \left(1-\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{100}$$

85　根据定理 4.4，风险中性概率的存在意味着不存在套利机会。

4.2　模型的扩展

股票一类的证券，如果交易这种证券与其他资产无关，则称之为**基本证券**（primary securities）。相反，衍生证券，例如期权、远期合约（在第 1 章中我们已经列举了一些简单例子），是法定的合约，给予持有者一定的金融权利和义务，这些权利和义务由标的证券价格决定。标的证券可以是基本证券，如股票远期合约的情况，它还可以是衍生证券，如在期货期权的情况下。衍生证券没有属于自己的权利，除非标的证券已经交易。衍生证券被认为是**未定权益**（contingent claims），因为它们

的价值由标的证券价格决定。

例如，股票远期合约多头头寸的持有者承诺在特定的交割时间以远期价格购买股票，无论那时的股票价格是多少。远期头寸的价值随股票而定，如果在交割日股票的市场价格高于远期价格，则其价值为正；如果股票的市场价格低于远期价格，则其价值为负。

注 4.1

在 4.1 节的假设中，无套利原则假设是针对投资策略仅包含两种基本证券，诸如股票和债券（或者货币市场账户）论述的，而在许多著作中，要求在套利证明中构造的投资策略除了股票和债券外还包含衍生证券。为更精确，需要把这些假设扩展到由基本证券和衍生证券组成的投资策略。

4.1 节中的只包含风险股票和货币市场账户的资产组合的状况，将扩展到除股票以外的各种其他类型的风险证券。特别地，为适应实际情况需要，可以包含衍生证券，诸如远期合约和期权；也可以包含基本证券诸如各种到期日的债券，它们的未来价格可以是随机的（当然在到期日除外）。我们将放松在货币市场账户上的投资是无风险的假设，引入随机利率的观点，按照这种思路，我们将在第 6～8 章中详细研究衍生证券；在第 10～11 章中研究随机债券价格和利率期限结构。

86

各种证券的交易模式与 4.1 节中的股票的模式交易类似。我们用 $S_1(n)$，…，$S_m(n)$ 表示 m 种不同的基本证券在时间 n 的价格，一般来说，是 m 种股票，也可以包括其他资产，诸如外币、商品和各种不同到期日的债券。为了与基本证券的价格相区别，我们用 $A(n)$ 表示货币市场账户的价格。另外，我们引入 k 种不同的衍生证券，如远期合约、看涨期权或看跌期权，或者其他的未定权益，它们在时间 n 的市场价格用 $D_1(n)$，…，$D_k(n)$ 表示。

与股票和债券的价格不同，我们不再要求所有衍生证券的价格是正的。例如，在交易时，远期合约的价值为零，以后它可以并且经常是负的，因为远期合约多头头寸的持有者经常会以高于市场的价格购买股票。基本证券未来的价格 $S_1(n)$，…，$S_m(n)$ 和 $A(n)$，以及衍生证券的未来价格 $D_1(n)$，$D_2(n)$ …，$D_k(n)$ 是随机变量，但是我们不排除它们之中的某一些可以用一个常数随机变量或者简单地用实数表示，比如到期日债券的价格可以是预先已知的。所有的当前价格 $S_1(0)$，…，$S_m(0)$，$A(0)$，$D_1(0)$，…，$D_k(0)$ 在时间 0 当然是已知的，即也是实数。

基本证券的头寸包括货币市场账户，我们用 x_1，…，x_m 和 y 表示，相应的衍生证券用 z_1，…，z_k 表示。在时间 n 持有这类头寸的投资者的财富为

$$V(n)=\sum_{j=1}^{m}x_jS_j(n)+yA(n)+\sum_{i=1}^{k}z_iD_i(n)$$

它扩展了式（4.1）。

4.1 节中的假设需要被如下的假设代替。

假设 4.1a（随机性）

对任意的 $n=1, 2, \cdots$，资产价格 $S_1(n), \cdots, S_m(n), A(n), D_1(n), \cdots, D_k(n)$ 是随机变量。

假设 4.2a（价格的正性）

87

基本证券的价格，包括货币市场账户的价格，是正的，即

$$S_1(n), \cdots, S_m(n), A(n)>0 \quad n=0, 1, 2, \cdots$$

假设 4.3a（可分性、流动性和卖空）

投资者可以买入、卖出和持有任意数量的资产，即可以是整数、分数、正数、负数和零。一般地，

$$x_1, \cdots, x_m, y, z_1, \cdots, z_k \in \mathbb{R}$$

假设 4.4a（偿付能力）

投资者的财富始终是非负的，即

$$V(n)\geqslant 0 \quad n=0, 1, 2\cdots$$

假设 4.5a（离散单元价格）

对每一个 $n=0, 1, 2\cdots$，价格 $S_1(n), \cdots, S_m(n), A(n), D_1(n), \cdots, D_k(n)$ 是仅取有限多个值的随机变量。

定义 4.1～4.4 也可以立刻扩展为：

定义 4.1a

资产组合是向量

$$(x_1(n), \cdots, x_m(n), y(n), z_1(n), \cdots, z_k(n))$$

它表示时间 $n-1$ 和 n 之间的投资者持有的基本证券和衍生证券的数量。下标为 $n=1, 2\cdots$ 的资产组合序列称为投资策略。在时间 $n\geqslant 1$，投资者的财富或者策略价值为

$$V(n)=\sum_{j=1}^{m}x_j(n)S_j(n)+y(n)A(n)+\sum_{i=1}^{k}z_i(n)D_i(n)$$

在时间 0 的初始财富为

$$V(0)=\sum_{j=1}^{m}x_j(1)S_j(0)+y(1)A(0)+\sum_{i=1}^{k}z_i(1)D_i(0)$$

定义 4.2a

88

如果在时间 $n\geqslant1$ 构成的持有到下一个时段 $n+1$ 的资产组合完全由当前财富 $V(n)$ 融资，则称投资策略是自融资的，有

$$\sum_{j=1}^{m}x_j(n+1)S_j(n)+y(n+1)A(n)+\sum_{i=1}^{k}z_i(n+1)D_i(n)=V(n)$$

定义 4.3a

如果对每一个时间 $n=0, 1, 2\cdots$ 构造的资产组合

$$(x_1(n+1), \cdots, x_m(n+1), y(n+1), z_1(n+1), \cdots, z_k(n+1))$$

仅仅取决于直到且包括时间 n 的市场状况树的节点，则称投资策略是可预测的。

定义 4.4a

投资策略称为是可允许的，如果它是自融资的，可预测的，而且对每一个 $n=0, 1, 2\cdots$，

$$V(n)\geqslant0$$

的概率为 1。

无套利原则可以不需任何修改地扩展。

假设 4.6a (无套利原则)

对某个 $n=1, 2, \cdots$，不存在任何可允许的策略使得 $V(0)=0$ 且 $V(n)>0$ 有正的概率。

资产定价基本定理可以表示如下。

定理 4.4a (资产定价基本定理)

无套利原则等价于存在 Ω 上且满足所有的 $\omega\in\Omega$，$P_*(\omega)>0$ 的概率 P_*，并且基本证券和衍生证券的折现价格 $\widetilde{S}_j(n)=\frac{S_j(n)}{A(n)}$ 和 $\widetilde{D}_i(n)=\frac{D_i(n)}{A(n)}$ 对于 P_* 是鞅，即

$$E_*(\widetilde{S}_j(n+1)\mid S(n))=\widetilde{S}_j(n), E_*(\widetilde{D}_i(n+1)\mid S(n))=\widetilde{D}_i(n)$$

89 对任意 $j=1, 2, \cdots, m$，任意 $i=1, 2, \cdots, k$，和任意 $n=0, 1, 2, \cdots$ 成立，这里 $E_*(\cdot \mid S(n))$ 表示在时间 n 已知股票价格 $S(n)$ 对概率 P_* 计算的条件期望。

例 4.6

我们假设状况 ω_1，ω_2，ω_3，ω_4，股票价格 $S(0)$，$S(1)$，$S(2)$ 和货币市场价格 $A(0)$，$A(1)$，$A(2)$ 与例 4.5 相同。另外我们考虑欧式看涨期权，它给予持有者在时间 2 以施权价 $X=85$ 美元购买股票的权利（但不是义务）。

在这种情况下，我们需要考虑模型对于三种资产——即股票、货币市场和期权——的扩展模型，其价格分别为 $S(n)$，$A(n)$，$C^E(n)$，这里 $C^E(n)$ 是期权在时间 $n=0, 1, 2$ 时的市场价格。

在时间 2，期权的价格由施权价和股票价格确定，即

$$C^E(2)=\max\{S(2)-X, 0\}$$

价格 $C^E(0)$ 和 $C^E(1)$ 可以利用资产定价基本定理计算得（这也是对定理名称的解释）。根据定理，存在概率 P_* 使得股票和期权的折现价格 $\widetilde{S}(n)=\frac{S(n)}{A(n)}$ 和 $\widetilde{C}^E(n)=\frac{C^E(n)}{A(n)}$ 是鞅，否则将存在套利机会。无论怎样，存在唯一的可以将 $\widetilde{S}(n)$ 转化成为鞅的概率 P_*，即例 4.5 中计算出的概率。因此，$\widetilde{C}^E(n)$ 对于这个概率 P_* 必是一个鞅，于是有

$$C^E(1)=\frac{A(1)}{A(2)}E_*(C^E(2) \mid S(1)),\ C^E(0)=\frac{A(0)}{A(1)}E_*(C^E(1))$$

对于每个状况 P_* 的值在例 4.5 中已计算出，我们可以利用它计算 $C^E(1)$ 和 $C^E(0)$。例如，

$$\begin{aligned} C^E(1, \omega_1) &= C^E(1, \omega_2) \\ &= \frac{A(1)}{A(2)} \times \frac{P_*(\omega_1)C^E(2, \omega_1)+P_*(\omega_2)C^E(2, \omega_2)}{P_*(\omega_1)+P_*(\omega_2)} \\ &= \frac{110}{121} \times \frac{\frac{19}{30}\times 27+\frac{19}{60}\times 21}{\frac{19}{30}+\frac{19}{60}} \cong 22.73 \text{（美元）} \end{aligned}$$

用同样的方法，我们有

状况	$C^E(0)$	$C^E(1)$	$C^E(2)$
ω_1	19.79	22.73	27.00
ω_2	19.79	22.73	21.00
ω_3	19.79	3.64	5.00
ω_4	19.79	3.64	0.00

练习 4.8

90

应用资产定价基本定理计算时间 0 和时间 1 的看跌期权的价格。假设期权的施权价为 110 美元，两个时段之后到期，状况 ω_1，ω_2，ω_3，ω_4，股票价格 $S(0)$，$S(1)$，$S(2)$ 和货币市场价格 $A(0)$，$A(1)$，$A(2)$与例 4.5 相同。

第 5 章　资产组合管理

91　投资于风险证券的投资者总会担心亏损或业绩不佳。在本章中，我们分析在多个证券上分散投资的优点。虽然我们使用的数学工具非常简单，但却得出了很多意想不到的结论。

5.1　风险

首先，我们需要确定一个合适的变量来度量风险。例如，在到期日，投资收益率为 8%的债券没有风险，在这种情况下，风险的测度应该为 0。如果取决于市场状况，投资收益为 11%或者 13%，则这个投资风险明显比投资收益为 2%或者 22%的投资风险更小。收益率价差很难用于测量风险，因为收益率忽视了概率。如果收益率是 22%的概率是 0.99，收益率是 2%的概率是 0.01，投资者可能认为投资风险很小。而如果同样的收益率发生的概率都是 0.5，则投资者会认为投资的风险较大。计算风险的数量需要抓住风险的两个方面：(1) 某一参照值与每个市场状况之下收益率值之间的差；(2) 各种不同状况的概率。

假设风险资产的收益率 K 为随机变量，自然取期望 $E(K)$ 作为参照值，则方差 $\mathrm{Var}(K)$ 作为风险的度量是合适的。

练习 5.1

计算如下三个投资项目的风险 $\mathrm{Var}(K_1)$，$\mathrm{Var}(K_2)$，$\mathrm{Var}(K_3)$，这里收益率 K_1，K_2，K_3 取决于市场状况：

状况	概率	收益率 K_1	收益率 K_2	收益率 K_3
ω_1	0.25	12%	11%	2%
ω_2	0.75	12%	13%	22%

在这三个投资项目中，哪一个项目的风险最大？哪一个项目的风险最小？

练习 5.2

考虑两个状况：状况 ω_1 的概率为 $\frac{1}{4}$；状况 ω_2 的概率为 $\frac{3}{4}$。假设某个证券在第一个状况的收益率 $K_1(\omega_1)=-2\%$；在第二个状况的收益率 $K_1(\omega_2)=8\%$。如果另一个证券在第一个状况的收益率 $K_2(\omega_1)=-4\%$，计算另一个状况的收益率$K_2(\omega_2)$，使得两个证券具有相同的风险。

在某些情况下，用收益率的标准差 $\sigma_K=\sqrt{\mathrm{Var}(K)}$测量风险更合适。如果以确定的单位去测量某变量，那么标准差可以用相同的单位表示，与原来的变量直接相关。而方差则不同，它将用平方单位表示。

例 5.1

92 假设某个投资的收益率 $K=3\%$或者-1%，其概率都是 0.5。那么风险为

$$\mathrm{Var}(K)=0.000\,4 \quad \text{或者} \quad \sigma_K=0.02$$

取决于选择方差还是标准差。现在假设另一个投资的收益率是第一个投资收益率的 2 倍，即 $2K=6\%$或者-2%，概率仍然是 0.5。那么第二个投资的风险为

$$\mathrm{Var}(2K)=0.001\,6 \quad \text{或者} \quad \sigma_{2K}=0.04$$

即如果用方差测量，则风险为原先的 4 倍；如果用标准差测量，则风险为 2 倍。

93 这可以用以下的一般法则表示：对任意的实数 a，有

$$\mathrm{Var}(aK)=a^2\mathrm{Var}(K)$$
$$\sigma_{aK}=|a|\sigma_K$$

注 5.1

另一个量化风险的方法是利用对数收益率 k 的方差 $\mathrm{Var}(k)$（或者标准差 σ_k），K 和 k 的选择取决于需要完成的工作的性质。例如，如果投资者对时间上的一系列投资有兴趣，那么，为测量风险，对数收益率的方差更有用，这是因为基于对数收益率风险的可加性：

$$\mathrm{Var}(k(0,n))=\mathrm{Var}(k(1))+\cdots+\mathrm{Var}(k(n))$$

式中，$k(i)$ 为时段 $i=1,\cdots,n$ 的对数收益率，并且 $k(0,n)$ 是从 0 到 n 时段上的对数收益率，假设 $k(i)$ 是独立的。上式成立是因为根据命题 3.2，$k(0,n)=k(1)+\cdots+k(n)$，以及相互独立的随机变量和的方差等于它们的方差的和。

而在本章中，我们研究在单个时段同时持有多个证券的资产组合，为此，$E(K)$ 和 $\mathrm{Var}(K)$ 的性质比对数收益率更合适，其中 K 为原来的资产组合的收益率（见下面的式（5.4）和式（5.5））。

练习 5.3

考虑两个风险证券，其收益率 K_1 和 K_2 为

状况	概率	收益率 K_1	收益率 K_2
ω_1	0.5	10.53%	7.23%
ω_2	0.5	13.87%	10.57%

计算相应的对数收益率 k_1 和 k_2，并比较 $\mathrm{Var}(k_1)$ 和 $\mathrm{Var}(k_2)$，$\mathrm{Var}(K_1)$ 和 $\mathrm{Var}(K_2)$。

5.2 两证券

94

我们在本节中将详细地论述在只有两个风险证券的简单情况下，期望收益和风险之间的关系。

例 5.2

假设两只股票价格变化如下：

状况	概率	收益率 K_1	收益率 K_2
ω_1	0.5	10%	−5%
ω_2	0.5	−5%	10%

如果我们将资金平分投资于这两只股票，那么我们在每个状况将有 5%的收益（在一只股票上损失 5%，而在另一只股票上收益 10%）。尽管分别

投资于这两只股票是有风险的，但我们已经通过将资金平分投资于两只股票消除了风险。这是分散投资的简单例子，在这里特别有效，因为相应的收益率是非负的。

除了用持有的证券份额来描述资产组合之外，我们现在引入另一个非常方便的描述证券之间的现金分配的变量 w。

例 5.3

假设两种股票的每股价格分别为 $S_1(0)=30$ 美元，$S_2(0)=40$ 美元。我们构造一个价值 $V(0)=1\ 000$ 美元的资产组合。购买第一种股票 20 股，购买第二种股票 10 股，那么，两个股票的资金分配为

$$w_1=\frac{30\times 20}{1\ 000}=60\%,\ w_2=\frac{10\times 40}{1\ 000}=40\%$$

w_1 和 w_2 称为权重。如果股票的价格变为 $S_1(1)=35$ 美元，$S_2(1)=39$ 美元，那么资产组合的价值 $V(1)=20\times 35+10\times 39=1\ 090$ 美元。注意，此时两个证券投资的比例不再是 60%和 40%，而是

$$\frac{20\times 35}{1\ 090}\cong 64.22\%,\ \frac{10\times 39}{1\ 090}\cong 35.78\%$$

尽管在组合中的股票数量保持不变。

95

权重定义为

$$w_1=\frac{x_1 S_1(0)}{V(0)},\ w_2=\frac{x_2 S_2(0)}{V(0)}$$

式中，x_1 和 x_2 为在资产组合中的股票数量。这意味着，w_k 是初始资产组合中投资于证券 k 的比例。注意，权重相加总是 100%，即

$$w_1+w_2=\frac{x_1 S_1(0)+x_2 S_2(0)}{V(0)}=\frac{V(0)}{V(0)}=1 \tag{5.1}$$

如果允许卖空，那么其中一个权重为负，另一个权重可以大于 1。

例 5.4

假设资产组合的价值 $V(0)=1\ 000$ 美元，由例 5.3 中第一种股票多头和第二种股票空头构成，其权重 $w_1=120\%$，$w_2=-20\%$。则有

$$x_1=w_1\frac{V(0)}{S_1(0)}=120\%\times\frac{1\ 000}{30}=40$$

$$x_2=w_2\frac{V(0)}{S_2(0)}=-20\%\times\frac{1\ 000}{40}=-5$$

如果股票价格变化与例 5.3 中相同，那么资产组合的价值变为

$$V(1)=x_1S_1(1)+x_2S_2(1)=V(0)\left(w_1\frac{S_1(1)}{S_1(0)}+w_2\frac{S_2(1)}{S_2(0)}\right)$$
$$=1\ 000\left(120\%\times\frac{35}{30}-20\%\times\frac{39}{40}\right)=1\ 205\text{（美元）}$$

收益来自第一种股票价格的上升和第二种股票价格的下降。而一个小投资者可能会面对卖空的某些限制。例如，他必须支付卖空股票所得的50%的保证金，总计为 50%×200＝100 美元，可以按无风险利率借款，该贷款的利息支付可以从资产组合的最终价值 $V(1)$ 中减去。

练习 5.4

96

计算资产组合的价值 $V(1)$，它的初始价值 $V(0)=100$ 美元。资产组合由权重 $w_1=25\%$，$w_2=75\%$的两种证券构成。假设证券初始价格由 $S_1(0)=45$ 美元和 $S_2(0)=33$ 美元，变为 $S_1(1)=48$ 美元和 $S_2(1)=32$ 美元。

在例 5.4 和练习 5.4 中，我们看到$\frac{V(1)}{V(0)}$对价格的依赖仅源于比率$\frac{S_1(1)}{S_1(0)}=1+K_1$ 和$\frac{S_2(1)}{S_2(0)}=1+K_2$。这说明，资产组合的收益率仅取决于权重 w_1 和 w_2 以及这两个证券的收益率 K_1 和 K_2。

命题 5.1

由两个证券组成的资产组合的收益率 K_V 是加权平均值，即

$$K_V=w_1K_1+w_2K_2 \tag{5.2}$$

式中，w_1 和 w_2 为权重；K_1 和 K_2 为这两个证券的收益率。

证明

假设资产组合由数量为 x_1 的第一种股票和数量为 x_2 的第二种股票组成，那么资产组合的初始价值和最终价值是

$$V(0)=x_1S_1(0)+x_2S_2(0)$$
$$V(1)=x_1S_1(0)(1+K_1)+x_2S_2(0)(1+K_2)$$
$$=V(0)(w_1(1+K_1)+w_2(1+K_2))$$

因此，资产组合的收益率

$$K_V=\frac{V(1)-V(0)}{V(0)}=w_1K_1+w_2K_2 \qquad \square$$

练习 5.5

计算由两种股票构成的资产组合的收益率，其权重为 $w_1=$

30%，$w_2=70\%$，各股票的收益情况如下：

97

状况	收益率 K_1	收益率 K_2
ω_1	12%	−4%
ω_2	10%	7%

注 5.2

对于对数收益率，类似于式（5.2）的公式成立，即

$$e^{k_V}=w_1e^{k_1}+w_2e^{k_2} \tag{5.3}$$

可是，如果我们需要收益率的期望和方差或标准差与权重相关，那么这个公式不是特别有用。另一方面，如下所述，式（5.2）可以推导出上面要求的结果。

练习 5.6

验证公式（5.3）。

5.2.1 资产组合的期望收益和风险

由两个证券组成的资产组合的期望收益可以很容易地用这两个证券的期望收益和权重表示，即

$$E(K_V)=w_1E(K_1)+w_2E(K_2) \tag{5.4}$$

这可以由式（5.2）和数学期望的可加性得出。

例 5.5

考虑给出概率的如下三个状况（三叉树模型）。假设在这三个状况下，两只股票的收益率如下：

状况	概率	收益率 K_1	收益率 K_2
ω_1（衰退）	0.2	−10%	−30%
ω_2（萧条）	0.5	0%	20%
ω_3（繁荣）	0.3	10%	50%

股票的期望收益为

$$E(K_1)=-0.2\times10\%+0.5\times0\%+0.3\times10\%=1\%$$
$$E(K_2)=-0.2\times30\%+0.5\times20\%+0.3\times50\%=19\%$$

98

假设将可利用资金的 60%投资于第一种股票，40%投资于第二种股票，则这个资产组合的收益率为

$$E(K_V)=w_1E(K_1)+w_2E(K_2)$$
$$=0.6\times1\%+0.4\times19\%=8.2\%$$

练习 5.7

如果由两种股票构成的资产组合的期望收益为 $E(K_V)=20\%$，给定第一种股票和第二种股票的收益率信息如下：

状况	概率	收益率 K_1	收益率 K_2
ω_1（衰退）	0.1	-10%	10%
ω_2（萧条）	0.5	0%	20%
ω_3（繁荣）	0.4	20%	30%

计算权重。

为计算 K_V 的方差，不仅需要知道投资组合中股票的收益率 K_1 和 K_2 的方差，还需要知道这两个收益率的协方差。

定理 5.2

资产组合的收益率的方差为

$$\mathrm{Var}(K_V)=w_1^2\mathrm{Var}(K_1)+w_2^2\mathrm{Var}(K_2)+2w_1w_2\mathrm{Cov}(K_1,K_2) \tag{5.5}$$

证明

由于 $K_V=w_1K_1+w_2K_2$，并合并含 w_1^2，w_2^2 和 w_1w_2 的项，我们就可以计算

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(K_V)&=E(K_V^2)-E(K_V)^2\\&=w_1^2[E(K_1^2)-E(K_1)^2]+w_2^2[E(K_2^2)-E(K_2)^2]\\&\quad+2w_1w_2[E(K_1K_2)-E(K_1)E(K_2)]\\&=w_1^2\mathrm{Var}(K_1)+w_2^2\mathrm{Var}(K_2)+2w_1w_2\mathrm{Cov}(K_1,K_2)\end{aligned}$$

□

99 为避免烦琐，我们引入如下资产组合以及单项资产的期望和方差的记号：

$$\mu_V=E(K_V),\quad \sigma_V=\sqrt{\mathrm{Var}(K_V)}$$
$$\mu_1=E(K_1),\quad \sigma_1=\sqrt{\mathrm{Var}(K_1)}$$
$$\mu_2=E(K_2),\quad \sigma_2=\sqrt{\mathrm{Var}(K_2)}$$

我们还引入相关系数

$$\rho_{12}=\frac{\mathrm{Cov}(K_1,K_2)}{\sigma_1\sigma_2} \tag{5.6}$$

则式（5.4）和式（5.5）可以写成

$$\mu_V = w_1\mu_1 + w_2\mu_2 \tag{5.7}$$

$$\sigma_V^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \tag{5.8}$$

注 5.3

我们总假设风险证券的收益率 K_1 和 K_2 为非常数随机变量，由于 σ_1，$\sigma_2 > 0$，因此 ρ_{12} 总是有定义的，因为式（5.6）的分母 σ_1，σ_2 不为零。

例 5.6

利用如下数据：

状况	概率	收益率 K_1	收益率 K_2
ω_1（衰退）	0.4	−10%	20%
ω_2（萧条）	0.2	0%	20%
ω_3（繁荣）	0.4	20%	10%

我们想比较用方差测量的 $w_1 = 40\%$，$w_2 = 60\%$的资产组合的风险与资产组合成员的风险。直接计算，于是有

$$\sigma_1^2 \cong 0.0184,\ \sigma_2^2 \cong 0.0024,\ \rho_{12} \cong -0.96309$$

由式（5.8）可以计算出

$$\begin{aligned}\sigma_V^2 &\cong (0.4)^2 \times 0.0184 + (0.6)^2 \times 0.0024 + 2 \times 0.4 \times 0.6 \\ &\quad \times (-0.96309) \times \sqrt{0.0184} \times \sqrt{0.0024} \\ &\cong 0.000736\end{aligned}$$

注意，方差 σ_V^2 小于 σ_1^2 和 σ_2^2。

例 5.7

100

考虑另一个资产组合，其权重 $w_1 = 80\%$，$w_2 = 20\%$，其他参数与例 5.6 相同，则

$$\begin{aligned}\sigma_V^2 &\cong (0.8)^2 \times 0.0184 + (0.2)^2 \times 0.0024 + 2 \times 0.8 \times 0.2 \\ &\quad \times (-0.96309) \times \sqrt{0.0184} \times \sqrt{0.0024} \\ &\cong 0.009824\end{aligned}$$

σ_V^2 介于 σ_1^2 和 σ_2^2 之间。

命题 5.3

如果不允许卖空，则资产组合的方差 σ_V^2 不会超过成员方差 σ_1^2 和 σ_2^2 的最大者，即

$$\sigma_V^2 \leqslant \max\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\}$$

证明

假设 $\sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2$，如果不允许卖空，则 w_1，$w_2 \geqslant 0$，并且

$$w_1\sigma_1 + w_2\sigma_2 \leqslant (w_1 + w_2)\sigma_2 = \sigma_2$$

因为相应的相关系数满足 $-1 \leqslant \rho_{12} \leqslant 1$，由此得出

$$\begin{aligned}\sigma_V^2 &= w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ &\leqslant w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_1\sigma_2 \\ &= (w_1\sigma_1 + w_2\sigma_2)^2 \leqslant \sigma_2^2\end{aligned}$$

如果 $\sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2$，则证明是类似的。 □

例 5.8

现在考虑权重 $w_1 = -50\%$，$w_2 = 150\%$ 的资产组合（允许卖空证券），其他数据与例 5.6 相同，则这个资产组合的方差为

$$\begin{aligned}\sigma_V^2 &\cong (-0.5)^2 \times 0.018\,4 + (1.5)^2 \times 0.002\,4 + 2 \times (-0.5) \\ &\quad \times 1.5 \times (-0.963\,09) \times \sqrt{0.018\,4} \times \sqrt{0.002\,4} \\ &\cong 0.019\,6\end{aligned}$$

σ_V^2 比 σ_1^2 和 σ_2^2 都大。

练习 5.8

101

利用例 5.6 的数据计算期望收益率 $\mu_V = 46\%$ 的投资组合中各项资产的权重，并计算这个资产组合的风险 σ_V^2。

相关系数总满足 $-1 \leqslant \rho_{12} \leqslant 1$。下一个命题涉及两个特殊情况，假设 ρ_{12} 取值为 1 或者 -1，这意味着资产组合中的证券完全正相关或者完全负相关。

命题 5.4

如果 $\rho_{12} = 1$，当 $\sigma_1 \neq \sigma_2$，且

$$w_1 = -\frac{\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}, \quad w_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2} \tag{5.9}$$

时，$\sigma_V = 0$（必须卖空，因为 w_1 或者 w_2 是负的）。

如果 $\rho_{12} = -1$，当

$$w_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad w_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \tag{5.10}$$

时，$\sigma_V=0$（不必卖空，因为 w_1 和 w_2 都为正）。

证明

假设 $\rho_{12}=1$，那么式（5.8）变为

$$\sigma_V^2=w_1^2\sigma_1^2+w_2^2\sigma_2^2+2w_1w_2\sigma_1\sigma_2=(w_1\sigma_1+w_2\sigma_2)^2$$

并且 $\sigma_V^2=0$，当且仅当 $w_1\sigma_1+w_2\sigma_2=0$ 时。这等价于 $\sigma_1\neq\sigma_2$ 以及式（5.9），因为 $w_1+w_2=1$。

现在假设 $\rho_{12}=-1$，那么式（5.8）变为

$$\sigma_V^2=w_1^2\sigma_1^2+w_2^2\sigma_2^2-2w_1w_2\sigma_1\sigma_2=(w_1\sigma_1-w_2\sigma_2)^2$$

并且 $\sigma_V^2=0$，当且仅当 $w_1\sigma_1-w_2\sigma_2=0$ 时。最后的等式等价于式（5.10），因为 $w_1+w_2=1$。 □

每一个资产组合可用 σ，μ 平面上坐标为 σ_V 和 μ_V 的点表示，我们在图 5—1 中画出两条线，表示 $\rho_{12}=-1$ 的资产组合（左）和 $\rho_{12}=1$ 的资产组合（右）。粗黑线段对应于不卖空的资产组合。

102

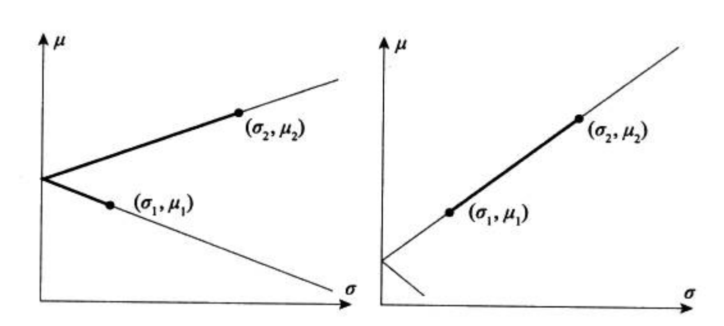


图 5—1　$\rho_{12}=-1$ 和 $\rho_{12}=1$ 的典型的资产组合线

假设 $\rho_{12}=-1$，由命题 5.4 的证明可知，$\sigma_V=|w_1\sigma_1-w_2\sigma_2|$。另外，由式（5.7）可知 $\mu_V=w_1\mu_1+w_2\mu_2$，由式（5.1）可知 $w_1+w_2=1$。我们选择 $s=w_2$ 作为参数，则 $1-s=w_1$，并且

$$\sigma_V=|(1-s)\sigma_1-s\sigma_2|$$
$$\mu_V=(1-s)\mu_1+s\mu_2$$

这些参数方程描绘出了（σ_1，μ_1）和（σ_2，μ_2）之间的折线段，当参数 s 增加时，点（σ_V，μ_V）会沿着画出的折线段从（σ_1，μ_1）移动到（σ_2，μ_2）。

如果 $\rho_{12}=1$，则 $\sigma_V=|w_1\sigma_1+w_2\sigma_2|$。我们仍选择 $s=w_2$ 作为参数，并且可以得到参数方程

$$\sigma_V=|(1-s)\sigma_1+s\sigma_2|$$

$$\mu_V=(1-s)\mu_1+s\mu_2$$

图形即图 5—1（σ_1，μ_1）和（σ_2，μ_2）之间的直线段。

如果不允许卖空，则 $0\leqslant s\leqslant 1$，那么在这两种情况下，粗黑线段对应于不允许卖空的资产组合。

练习 5.9

假设存在两种状况 ω_1 和 ω_2，考虑两个风险证券，其收益率为 K_1 和 K_2。证明对于某些 $a\neq 0$ 和 b，$K_1=aK_2+b$，并且推导出 $\rho_{12}=1$ 或者 -1。

我们下面的任务是，对于任意给定的满足 $-1<\rho_{12}<1$ 的 ρ_{12}，计算风险最小的资产组合。我们仍然取 $s=w_2$ 作为参数，那么式（5.7）和式（5.8）有如下形式

103

$$\mu_V=(1-s)\mu_1+s\mu_2 \tag{5.11}$$

$$\sigma_V^2=(1-s)^2\sigma_1^2+s^2\sigma_2^2+2s(1-s)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \tag{5.12}$$

很显然，μ_V 作为 s 的函数是直线，而 σ_V^2 是 s 的二次函数，s^2 的系数（即 $\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2>\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2=(\sigma_1-\sigma_2)^2\geqslant 0$）为正。定理（5.5）给出了资产组合方差（或者等价的标准差）最小化问题的解答。首先计算在没有卖空限制情况下的极小值。如果不允许卖空，我们将假设参数的取值范围为 $0\leqslant s\leqslant 1$。

定理 5.5

当 $-1<\rho_{12}<1$ 时，方差最小的资产组合在

$$s_0=\frac{\sigma_1^2-\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2} \tag{5.13}$$

达到。如果不允许卖空，那么最小的方差在

$$s_{\min}=\begin{cases}0 & s_0<0\\ s_0 & 0\leqslant s_0\leqslant 1\\ 1 & 1<s_0\end{cases}$$

达到。

证明

我们计算 σ_V^2 对 s 的导数，并且令导数等于 0，即

$$-2(1-s)\sigma_1^2+2s\sigma_2^2+2(1-s)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2-2s\rho_{12}\sigma_1\sigma_2=0$$

对 s 求解得到上面的 s_0，二阶导数

$$2\sigma_1^2+2\sigma_2^2-4\rho_{12}\sigma_1\sigma_2>2\sigma_1^2+2\sigma_2^2-4\sigma_1\sigma_2=2(\sigma_1-\sigma_2)^2\geqslant 0$$

为正。这就证明了在 s_0 有最小值。它是全局最小值，因为 σ_V^2 是 s 的二次函数。

如果不允许卖空，我们需要在 $0\leqslant s\leqslant 1$ 时，计算最小值。如果 $0\leqslant s_0\leqslant 1$，那么最小值在 s_0 得到；如果 $s_0<0$，则最小值在 0 达到；如果 $s_0>1$，则在 1 达到，因为 σ_V^2 是 s 的二次函数，s^2 项的系数是正的，如图 5—2 所示。曲线的加粗部分对应于不允许卖空的资产组合。 □

104

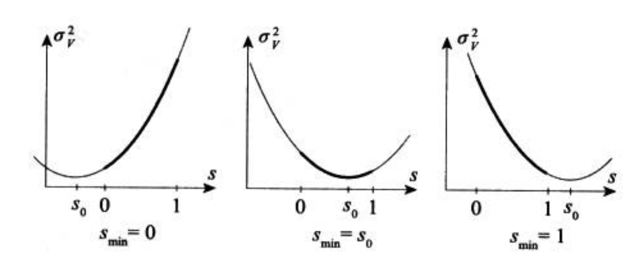


图 5—2 作为 s 的函数的方差 σ_V^2 的最小值

由参数方程（5.11）和（5.12）确定的 σ，μ 平面的线表示给定 σ_1，$\sigma_2>0$ 和 $-1\leqslant\rho_{12}\leqslant 1$ 的所有可能的资产组合。当没有卖空限制时，s 可以是任意实数。如果不允许卖空，则 $0\leqslant s\leqslant 1$，我们只得到一个线段。当 s 从 0 增加到 1，相应的点（σ_V，μ_V）会沿线从（σ_1，μ_1）移动到（σ_2，μ_2）。图 5—3 表明了两个典型的例子，ρ_{12} 接近于但大于 -1（左），ρ_{12} 接近于但小于 1（右）。粗黑线段表示不允许卖空的资产组合。

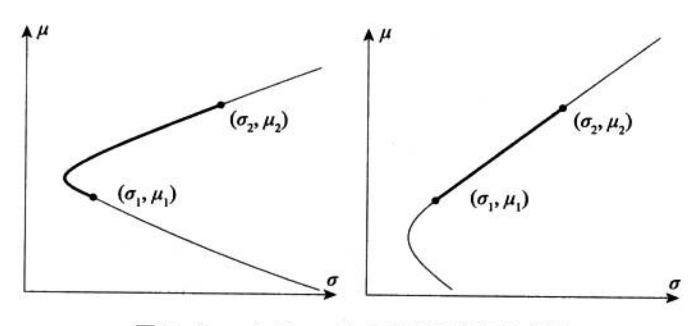


图 5—3 $-1<\rho_{12}<1$ 的典型的资产组合线

推论 5.6

假设 $\sigma_1\leqslant\sigma_2$，那么存在如下三种可能的情况：

(1) 如果 $-1\leqslant\rho_{12}\leqslant\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$，那么存在不卖空的资产组合，使得 $\sigma_V<\sigma_1$

（图 5—4 中的线 4 和线 5）；

(2) 如果 $\rho_{12}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$，则 $\sigma_V \geqslant \sigma_1$ 对每一个资产组合都成立（图 5—4 中的线 3）；

105

(3) 如果$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}<\rho_{12}\leqslant 1$，那么存在卖空的资产组合使得 $\sigma_V<\sigma_1$，但对每一个不卖空的资产组合有 $\sigma_V \geqslant \sigma_1$（图 5—4 中的线 1 和线 2）。

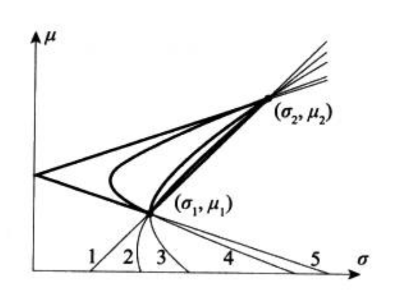


图 5—4　ρ_{12}的各种值的资产组合线

证明

(1) 如果 $-1\leqslant\rho_{12}<\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$，则$\frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}>s_0>0$。但是，由于$\frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}<1$，于是 $0<s_0<1$。这意味着，该资产组合具有最小方差，相应的参数为 s_0，包括不卖空的情况，并且满足 $\sigma_V<\sigma_1$。

(2) 如果 $\rho_{12}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$，则 $s_0=0$。因此，对每个资产组合，有 $\sigma_V \geqslant \sigma_1$，因为 σ_1^2 是最小方差。

(3) 如果$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}<\rho_{12}\leqslant 1$，则 $s_0<0$。在这种情况下，资产组合具有最小方差，相应地，s_0 属于卖空资产 1 的情况，并且满足 $\sigma_V<\sigma_1$，当 $s\geqslant s_0$ 时，σ_V 是 s 的递增函数，这意味着 $\sigma_V>\sigma_1$ 对每一个不卖空的资产组合成立。 □

上面的推论是重要的，因为推论表明，可以构造一个比任意其他资产组合风险更小的资产组合。在情况（1），可以得出这样的资产组合，且不用卖空；在情况（3），这也是可能的，但仅当卖空是允许时；在情况（2），不可能构造出这样的资产组合。

例 5.9

假设

$$\sigma_1^2=0.004\,1,\ \sigma_2^2=0.012\,1,\ \rho_{12}=0.979\,6$$

显然，$\sigma_1<\sigma_2$，并且$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}<\rho_{12}<1$，于是这是推论 5.6 的情况（3），我们的任务是计算风险最小并且不用卖空的资产组合。

106 利用定理 5.5，我们计算出

$$s_0 \cong -1.1663, \quad s_{\min}=0$$

由此得出，在方差最小的投资组合中，如果允许卖空，证券的权重应该是 $w_1 \cong 2.1663$，$w_2 \cong -1.1663$；不允许卖空，则 $w_1=1$，$w_2=0$。

练习 5.10

利用例 5.6 中的数据，计算风险最小的资产组合中各项资产的权重，它是否属于卖空的情况？

我们用包含一个无风险证券的资产组合的简短讨论结束本节。风险证券（股票）的方差是正的，而无风险证券（债券）的方差为零。

命题 5.7

由期望收益为 μ_1，标准差为 $\sigma_1>0$ 的风险证券和收益为 r_F，标准差为 0 的风险证券构成的资产组合的方差 σ_V 取决于风险证券的权重 w_1，即

$$\sigma_V=|w_1|\sigma_1.$$

证明

假设 $\sigma_1>0$，$\sigma_2=0$，则式（5.7）可以简化为 $\sigma_V^2=w_1^2\sigma_1^2$，上述关于 σ_V 的表达式可以由取平方根得出。 □

107 由一种风险证券和一种无风险证券构成的资产组合在 σ，μ 平面上的线段如图 5—5 所示。与前面一样，粗黑线段表示不允许卖空的资产组合。

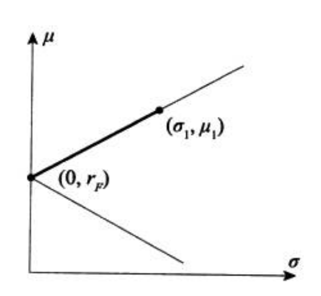


图 5—5　一个风险证券和一个无风险证券的资产组合线

5.3 多个证券

5.3.1 资产组合的风险和期望收益

由 n 个不同的证券构成的资产组合，可以用它们的权重

$$w_i=\frac{x_i S_i(0)}{V(0)},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

表示。这里 x_i 为在资产组合中的第 i 种证券的数量；$S_i(0)$ 为证券 i 的初始价格；$V(0)$ 为初始投资的金额。为方便起见，我们把权重排成一行矩阵，即

$$\boldsymbol{w}=[w_1\quad w_2\quad \cdots\quad w_n]$$

与两证券情形一样，权重之和等于 1，用矩阵的形式写成

$$1=\boldsymbol{u}\boldsymbol{w}^T \tag{5.14}$$

其中，

$$\boldsymbol{u}=[1\quad 1\quad \cdots\quad 1]$$

为所有 n 个元素为 1 的一行矩阵；$\boldsymbol{w}^T$ 是一列矩阵，为 $\boldsymbol{w}$ 的转置，并且适用于通常的矩阵乘法法则。满足式（5.14）的以 $\boldsymbol{w}$ 为权重的资产组合组成的可达集合，称为**可达资产组合**（attainable portfolios）。

假设证券的收益率为 K_1，…，K_n。期望收益率 $\mu_i=E(K_i)$，其中 $i=1$，2，…，n。我们将 i 也排成一行矩阵，即

$$\boldsymbol{m}=[\mu_1\quad \mu_2\quad \cdots\quad \mu_n]$$

两个收益率的协方差用 $c_{ij}=\mathrm{Cov}(K_i,\ K_j)$ 表示。以它们为元素的 $n\times n$ 协方差矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

108

我们已经知道协方差矩阵是对称的，并且是正定的。对角线元素是收益率的方差 $c_{ii}=\mathrm{Var}(K_i)$。另外，我们以后将假设矩阵 $\boldsymbol{C}$ 有逆矩阵 $\boldsymbol{C}^{-1}$。

命题 5.8

权重为 $\boldsymbol{w}=[w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_n]$的资产组合的收益 $K_V=w_1K_1+\cdots+w_nK_n$ 的期望收益 $\mu_V=E(K_V)$ 和方差 $\sigma_V^2=\mathrm{Var}(K_V)$ 为

$$\mu_V=\boldsymbol{m}\boldsymbol{w}^T \tag{5.15}$$

$$\sigma_V^2=\boldsymbol{w}\boldsymbol{C}\boldsymbol{w}^T \tag{5.16}$$

证明

μ_V 的公式可由期望的线性得出，即

$$\mu_V=E(K_V)=E\Big(\sum_{i=1}^{n}w_iK_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}w_iu_i=\boldsymbol{m}\boldsymbol{w}^T$$

对于 σ_V^2，我们可以利用协方差对于它的每一个变量的线性，于是有

$$\begin{aligned}\sigma_V^2&=\mathrm{Var}(K_V)=\mathrm{Var}\Big(\sum_{i=1}^{n}w_iK_i\Big)\\&=\mathrm{Cov}\Big(\sum_{i=1}^{n}w_iK_i,\sum_{i=1}^{n}w_jK_j\Big)=\sum_{i,j=1}^{n}w_iw_jc_{ij}\\&=\boldsymbol{w}\boldsymbol{C}\boldsymbol{w}^T\end{aligned}$$

□

练习 5.11

假设资产组合由三个证券组成，权重分别为 $w_1=40\%$，$w_2=-20\%$，$w_3=80\%$。给定证券的期望收益 $\mu_1=8\%$，$\mu_2=10\%$，$\mu_3=6\%$；标准差 $\sigma_1=1.5$，$\sigma_2=0.5$，$\sigma_3=1.2$ 和相关系数 $\rho_{12}=0.3$，$\rho_{23}=0.0$，$\rho_{31}=-0.2$，计算期望收益 μ_V 和标准差 σ_V。

我们将解决如下两个问题：

1. 在可行集合中，计算方差最小的资产组合，称其为最小方差资产组合。

109

2. 在可行集合中的所有的资产组合中，计算最小方差资产组合，使其收益为 μ_V。由参数 μ_V 表示的这组资产组合形成最小方差线。

因为方差是权重的连续函数，零是下界，在这两种情况下，最小值显然是存在的。

命题 5.9 (最小方差资产组合)

在可达集合中，最小方差资产组合的权重

$$\boldsymbol{w}=\frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{C}^{-1}}{\boldsymbol{u}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{u}^T}$$

证明

我们需要受约束于式（5.14）计算式（5.16）的最小值。为此目的，

我们利用**拉格朗日乘数法**（method of Lagrange multipliers）。令

$$F(\boldsymbol{w}, \lambda)=\boldsymbol{w}\boldsymbol{C}\boldsymbol{w}^T-\lambda\boldsymbol{u}\boldsymbol{w}^T$$

式中，λ 为拉格朗日乘数。当 F 对 w_i 的偏导数等于零时，我们得到 $2\boldsymbol{w}\boldsymbol{C}-\lambda\boldsymbol{u}=0$，即

$$\boldsymbol{w}=\frac{\lambda}{2}\boldsymbol{u}\boldsymbol{C}^{-1}$$

这是最小值的必要条件。将它代入约束式（5.14），于是有

$$1=\frac{\lambda}{2}\boldsymbol{u}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{u}^T$$

这里我们利用了 $\boldsymbol{C}$ 是对称矩阵；$\boldsymbol{C}^{-1}$ 也是对称矩阵。计算出 λ，并且代入 $\boldsymbol{w}$ 的表达式就可以得到要证明的公式。 □

命题 5.10（最小方差线）

期望收益为 μ_V 的可达资产组合中方差最小的资产组合权重为

$$\boldsymbol{w}=\frac{\begin{vmatrix}1 & \boldsymbol{u}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{m}^T\\ \mu_V & \boldsymbol{m}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{m}^T\end{vmatrix}\boldsymbol{u}\boldsymbol{C}^{-1}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{u}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{u}^T & 1\\ \boldsymbol{m}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{u}^T & \mu_V\end{vmatrix}\boldsymbol{m}\boldsymbol{C}^{-1}}{\begin{vmatrix}\boldsymbol{u}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{u}^T & \boldsymbol{u}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{m}^T\\ \boldsymbol{m}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{u}^T & \boldsymbol{m}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{m}^T\end{vmatrix}}$$

110

式中，要求分母中的行列式非零。权重线性地取决于 μ_V。

证明

这里我们需要受约束于式（5.14）和式（5.15），计算式（5.16）的最小值。取

$$G(\boldsymbol{w}, \lambda, \mu)=\boldsymbol{w}\boldsymbol{C}\boldsymbol{w}^T-\lambda\boldsymbol{u}\boldsymbol{w}^T-\mu\boldsymbol{m}\boldsymbol{w}^T$$

式中，λ 和 μ 是拉格朗日乘数。G 对 w_i 的偏导数等于零给出了极小值的必要条件 $2\boldsymbol{w}\boldsymbol{C}-\lambda\boldsymbol{u}-\mu\boldsymbol{m}=0$，由此可得出

$$\boldsymbol{w}=\frac{\lambda}{2}\boldsymbol{u}\boldsymbol{C}^{-1}+\frac{\mu}{2}\boldsymbol{m}\boldsymbol{C}^{-1}$$

代入约束式（5.14）和式（5.15），我们就可以得到线性方程组

$$1=\frac{\lambda}{2}\boldsymbol{u}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{u}^T+\frac{\mu}{2}\boldsymbol{u}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{m}^T$$

$$\mu_V=\frac{\lambda}{2}\boldsymbol{m}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{u}^T+\frac{\mu}{2}\boldsymbol{m}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{m}^T$$

解出 λ 和 μ 并代入 $\boldsymbol{w}$ 的表达式就可以得出要证明的公式。 □

例 5.10

（三证券）考虑三个证券，其期望收益、收益的标准差和相关系数为

$$\mu_1=0.10,\ \sigma_1=0.28,\ \rho_{12}=\rho_{21}=-0.10$$
$$\mu_2=0.15,\ \sigma_2=0.24,\ \rho_{23}=\rho_{32}=0.20$$
$$\mu_3=0.20,\ \sigma_3=0.25,\ \rho_{31}=\rho_{13}=0.25$$

我们将 μ_i 排成一行矩阵 $\boldsymbol{m}$，1 排成一行矩阵 $\boldsymbol{u}$，即

$$\boldsymbol{m}=\begin{bmatrix}0.10 & 0.15 & 0.20\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

下面我们计算协方差矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的元素 $c_{ij}=\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$，并计算矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的逆矩阵。

$$\boldsymbol{C}\cong\begin{bmatrix}0.0784 & -0.0067 & 0.0175\\ -0.0067 & 0.0576 & 0.0120\\ 0.0175 & 0.0120 & 0.0625\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}^{-1}\cong\begin{bmatrix}13.954 & 2.544 & -4.396\\ 2.544 & 18.548 & -4.274\\ -4.396 & -4.274 & 18.051\end{bmatrix}$$

111 由命题 5.9 我们可以计算出最小方差资产组合的权重。因为

$$\boldsymbol{uC}^{-1}\cong\begin{bmatrix}12.102 & 16.818 & 9.382\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{uC}^{-1}\boldsymbol{u}^T\cong 38.302$$

我们得到

$$\boldsymbol{w}=\frac{\boldsymbol{uC}^{-1}}{\boldsymbol{uC}^{-1}\boldsymbol{u}^T}\cong\begin{bmatrix}0.316 & 0.439 & 0.245\end{bmatrix}$$

这个资产组合的期望收益和标准差为

$$\mu_V=\boldsymbol{mw}^T\cong 0.146,\quad \sigma_V=\sqrt{\boldsymbol{wCw}^T}\cong 0.162$$

最小方差线可利用命题 5.10 计算，为此目的我们计算

$$\boldsymbol{uC}^{-1}\cong\begin{bmatrix}12.102 & 16.818 & 9.382\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{mC}^{-1}\cong\begin{bmatrix}0.898 & 2.182 & 2.530\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{uC}^{-1}\boldsymbol{u}^T\cong 38.302,\ \boldsymbol{mC}^{-1}\boldsymbol{m}^T\cong 0.923$$
$$\boldsymbol{uC}^{-1}\boldsymbol{m}^T=\boldsymbol{mC}^{-1}\boldsymbol{u}^T\cong 5.609$$

代入命题 5.10 中 $\boldsymbol{w}$ 的表达式，我们就可以得到所有期望收益为 μ_V 之中方差最小的投资组合的权重，即

$$\boldsymbol{w}\cong\begin{bmatrix}1.578-8.614\mu_V & 0.845-2.769\mu_V & -1.422+11.384\mu_V\end{bmatrix}$$

这个资产组合的标准差为

$$\sigma_V=\sqrt{\boldsymbol{wCw}^T}\cong\sqrt{0.237-2.885\mu_V+9.850\mu_V^2}$$

练习 5.12

在由三个证券——其期望收益 $\mu_1=0.20$，$\mu_2=0.13$，$\mu_3=0.17$；标准差 $\sigma_1=0.25$，$\sigma_2=0.28$，$\sigma_3=0.20$，以及两个收益的相关系数 $\rho_{12}=0.30$，$\rho_{23}=0.00$，$\rho_{31}=0.15$——构成的可达资产组合之中，计算方差最小的资产组合。这个资产组合的权重是什么？并计算这个资产组合的期望收益和标准差。

练习 5.13

在由练习 5.12 之中的三个证券构成的期望收益为 $\mu_V=20\%$的可达资产组合中，计算方差最小的资产组合。计算这个资产组合的权重和标准差。

例 5.11

112

（三证券情形）有两种方便的方法可以具体化例 5.10 中由三个证券构成的资产组合。一种方法可用图 5—6 表示。我们将三个权重中的两个，即 w_2 和 w_3 作为参数，另一个权重为 $w_1=1-w_2-w_3$（当然，其他两个权重也可作为参数）。w_2，w_3 平面上的每一个点表示一个资产组合。三角形的顶点表示仅由三个证券之中的一个证券组成的资产组合。例如坐标为（1，0）的顶点对应于权重 $w_1=0$，$w_2=1$，$w_3=0$，即表示所有的金额投资于证券 2 的组合。通过顶点的线，对应于仅有两个证券组成的资产组合。例如通过（1，0）和（0，1）的线对应于仅包含证券 2 和证券 3 的资产组合。三角形内的点，包括边界上的点对应于不卖空的资产组合。例如，$\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right)$表示初始金额的 10%投资于证券 1，40%投资于证券 2，50%投资于证券 3。三角形外部的点对应于三个证券之中有一个或两个被卖空。最小方差线是直线，因为期望收益与权重线性相关，如图 5—6 中的粗黑线所示。

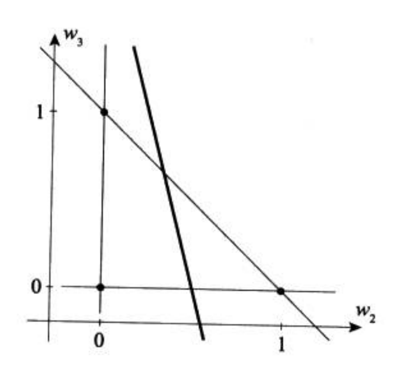


图 5—6　w_2 和 w_3 平面上的可达资产组合

图 5—7 给出了另一个具体化可达资产组合的方法，这种方法是利用资产组合的期望收益与标准差关系的曲线，称其为风险—期望收益图。图 5—7 中给出的三个点被认为是对应于这三个证券中仅由一个证券组成的资产组合。例如，所有的金额投资于证券 2 的资产组合我们用点（0.24，0.15）表示。通过这三个点中的两个点的线对应于由两个证券组成的资产组合，即我们在 5.2 节中详细研究过的两证券线。例如，包含证券 2 和证券 3 的资产组合位于通过（0.24，0.15）和（0.25，0.20）的线上。三个点和通过它们的线对应于图 5—6 的三角形的顶点和通过顶点的线。阴影区域（深色和浅色两部分），包括边界，表示由三个证券构成的资产组合，即所有可达资产组合。由粗黑线表示的边界为最小方差线。它的外形是著名的“马科维茨子弹”（Markowitz bullet）。深色阴影部分对应于图 5—6 中三角形的内部，表示不允许卖空的资产组合。

113

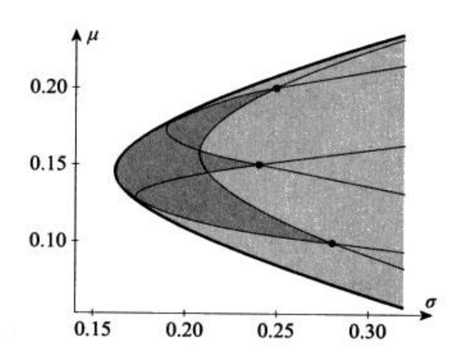


图 5—7　σ，μ 平面上的可达资产组合

想象图 5—6 中整个 w_2，w_3 平面如何映射到图 5—7 中阴影区域表示的可达资产组合是有意义的。即 w_2，w_3 平面沿最小方差线折叠，立刻弯曲并呈现“马科维茨子弹”的情形。特别地，这意味着 w_2，w_3 平面上的最小方差线相对的点对被映射成 σ，μ 平面上一个点。换句话说，图 5—7 中阴影区域内的每一个点对应于两个不同的资产组合。而最小方差线上的每一个点对应于一个单独的资产组合。

例 5.12

（三证券不卖空情形）对于例 5.10 和例 5.11 中的三证券，图 5—8 给出，如果不允许卖空情况将会怎样。所有不卖空的资产组合由 w_1，w_2 平面的三角形的内点和边界点，以及 σ，μ 平面上的阴影区域表示。不卖空的最小方差线在两个图中均用粗黑线表示。相对比，卖空的最小方差线用虚线表示。

114

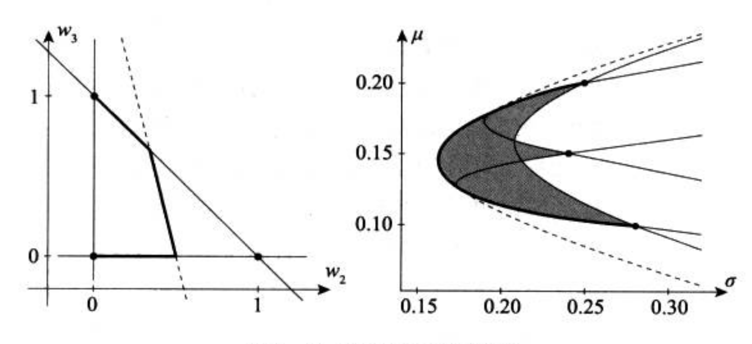


图 5—8 不卖空的资产组合

练习 5.14

对于例 5.12 中的三个证券构成的卖空和不卖空的资产组合，利用期望收益作为参数，计算最小方差线。并且（a）在 w_2，w_3 平面上；（b）在 σ，μ 平面上，画出所有卖空和不卖空的所有可达资产组合集。

5.3.2 有效边界

假设一个理性的投资者在两个证券之间选择。如果可能，他将选择具有较高的期望收益和较低的标准差，即风险较低的证券。这就引出了如下定义。

定义 5.1

我们称期望收益为 μ_1，标准差为 σ_1 的证券**优于**另一个期望收益为 μ_2，标准差为 σ_2 的证券，如果

$$\mu_1 \geqslant \mu_2 \quad 且 \quad \sigma_1 \leqslant \sigma_2$$

这个定义实际上可以扩展到资产组合，因为资产组合可以被认为是证券。

注 5.4

假设两个证券，一个证券优于另一个证券，占优证券的出现乍看起来可能是多余的，但它可能拥有某些用途。使用 5.2 节的技巧可以构造两个证券构成的资产组合，其风险比两者之中任何一个的风险更小。如图 5—9 所示，σ_1，μ_1 表示的证券优于 σ_2，μ_2 表示的证券。

115

定义 5.2

一个资产组合被称为是**有效的**，如果除了本身不存在优于它的其他

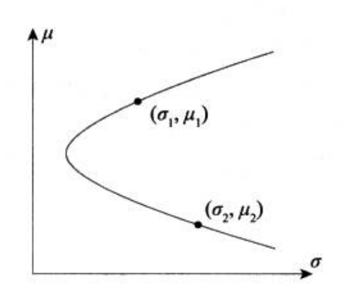


图 5—9　利用占优证券减少风险

的资产组合。在可达资产组合中，所有有效资产组合的集合称为**有效边界**。

每个理性的投资者都将选择有效资产组合，即总是选择占优的资产组合而不是被占优的资产组合。而不同的投资者可能会在有效边界上选择不同的有效资产组合。假设两个资产组合满足 $\mu_1 \leqslant \mu_2$ 和 $\sigma_1 \leqslant \sigma_2$，一个谨慎的投资者可能会选择具有较低风险 σ_1 和较低的期望收益 μ_1 的资产组合，而另一个投资者可能会选择具有较高的风险 σ_2 的资产组合，把较高的期望收益 μ_2 看做是增加风险的补偿。

特别地，一个有效的资产组合在具有相同的标准差（风险相同）的可达资产组合中的期望收益最大；在具有相同的期望收益的可达资产组合中的标准差最小（最小风险）。因此，有效边界必是最小方差线的子集。为弄清有效边界的结构，我们将更详细地研究最小方差线，然后选择合适的子集。

命题 5.11

在最小方差线上任取两个不同的资产组合，其权重为 $\boldsymbol{w}'$ 和 $\boldsymbol{w}''$，那么，对于任意的 $c \in \mathbb{R}$，最小方差线由权重为 $c\boldsymbol{w}' + (1-c)\boldsymbol{w}''$ 的资产组合构成，而且仅由这样的权重构成。

116

证明

由命题 5.10 构成的最小方差线的资产组合的权重由资产组合的期望收益 μ_V 的线性函数给出，即 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{a}\mu_V + \boldsymbol{b}$。如果 $\boldsymbol{w}'$ 和 $\boldsymbol{w}''$ 是最小方差线上的两个不同的权重，则对某个 $\mu_{V'} \neq \mu_{V''}$，$\boldsymbol{w}' = \boldsymbol{a}\mu_{V'} + \boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{w}'' = \boldsymbol{a}\mu_{V''} + \boldsymbol{b}$。因为当 $c \in \mathbb{R}$ 时，权重 $c\mu_{V'} + (1-c)\mu_{V''}$ 的数充满实数线，由此得出，当 $c \in \mathbb{R}$ 时，权重 $c\boldsymbol{w}' + (1-c)\boldsymbol{w}''$ 充满整个最小方差线。 □

这个命题很重要。这意味着，最小方差线的形状与在 5.2 节中详细研究的由两个证券构成的资产组合相同。这还意味着，两个或者三个证

券构成的资产组合的 σ，u 平面上的最小方差线（“马科维茨子弹”），其形状满足任何数量的证券构成的资产组合。

一旦弄清楚最小方差线的形状，识别有效边界就很容易了，对 n 个证券的情况也是如此。如图 5—10 所示，有效边界由最小方差线上的所有满足期望收益大于或等于最小方差资产组合的期望收益的所有资产组合构成。

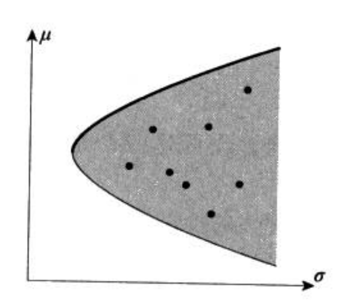


图 5—10　由多个证券构成的有效边界

下面的命题提供了有效边界的性质。它在**资本资产定价模型**（Capital Asset Pricing Model，CAPM）的证明中很有用。

命题 5.12

117

对于某些实数 $\gamma>0$ 和 μ，有效边界上任意资产组合的权重 $\boldsymbol{w}$（最小方差资产组合除外）满足条件

$$\gamma \boldsymbol{w}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{m}-\mu\boldsymbol{u} \tag{5.17}$$

证明

假设 $\boldsymbol{w}$ 是有效边界的资产组合的权重，而不是最小方差组合的权重。该资产组合的期望收益 $\mu_V=\boldsymbol{m}\boldsymbol{w}^T$，标准差 $\sigma_V=\sqrt{\boldsymbol{w}\boldsymbol{C}\boldsymbol{w}^T}$。在 σ，μ 平面上通过表示该资产组合的点画出有效边界的切线。这条线与纵轴相交，交点的坐标为 μ；这条线的斜率为$\dfrac{\boldsymbol{m}\boldsymbol{w}^T-\mu}{\sqrt{\boldsymbol{w}\boldsymbol{C}\boldsymbol{w}^T}}$，且这个斜率是所有通过纵轴坐标为 μ 的点与可达资产组合相交的线中斜率最大的。最大值是由受约束于 $\boldsymbol{u}\boldsymbol{w}^T=1$ 的所有的权重中取得的。我们令

$$F(w,\ \lambda)=\frac{\boldsymbol{m}\boldsymbol{w}^T-\mu}{\sqrt{\boldsymbol{w}\boldsymbol{C}\boldsymbol{w}^T}}-\lambda\boldsymbol{u}\boldsymbol{w}^T$$

式中，λ 为拉格朗日乘数。约束最大值的必要条件是 F 对权重 $\boldsymbol{w}$ 的偏导数为零。我们可以得到

$$m-\lambda\sigma_V u=\frac{\mu_V-\mu}{\sigma_V^2}wC$$

右乘 w^T，利用约束条件可以计算出 $\lambda=\frac{\mu}{\sigma_V}$。当 $\gamma=\frac{\mu_V-\mu}{\sigma_V^2}$时，就给出了要证明的条件。因为切线的斜率为正，于是我们有 $\mu_V>\mu$，即 $\gamma>0$。 □

注 5.5

从定理的证明我们容易得到 γ 和 u 的解释：$\gamma\sigma_V$ 为通过给定的资产组合的点的有效边界切线的斜率；μ 为 σ，μ 平面上的这个切线的截距。

练习 5.15

在由练习 5.12 中的三个证券组成的市场中，考虑期望收益 $\mu_V=21\%$的有效边界上的资产组合，计算 γ 和 μ 值，使得这个资产组合的权重 w 满足 $\gamma wC=m-\mu u$。

5.4 资本资产定价模型

118

当计算机运算速度很慢时，很难使用资产组合理论，因为$n=1\ 000$ 个可交易证券的协方差矩阵 C 将有 $n^2=1\ 000\ 000$ 个元素。为计算有效边界，我们需要计算逆矩阵 C^{-1}，但计算很复杂。准确地估计 C 在实践上很难。资本资产定价模型可以提供解决方法，这种方法在计算上更有效，而且不必估计 C，虽然有些过于简化，但是能够深刻地洞察某些基本的经济问题。

在 CAPM 中，假设每一个投资者利用同样的期望收益、标准差和相关系数的数值，仅根据这些作决策；特别地，每一个投资者计算出的有效边界都相同，并且都在有效边界上选择资产组合；投资者会按照他对待风险的态度，在有效边界上选择不同的资产组合。

5.4.1 资本市场线

从现在开始，我们假设除了 n 种风险证券外，还有一个无风险证券可利用。无风险证券的收益率用 r_F 表示，无风险证券的标准差当然是零。

考虑由无风险证券和指定的风险证券（可以是风险证券的资产组合）

构成的资产组合，其期望收益为 μ_1，标准差为 $\sigma_1>0$。根据命题 5.7，在 σ，μ 平面上，这样的资产组合可以构成由两个半直线组成的折线，如图 5—5 所示。取包含无风险证券和一个证券构成的资产组合（该证券的期望收益为 μ_1，标准差为 σ_1），它是在 σ，μ 平面上的由“马科维茨子弹”表示的可达资产组合，我们可以构造图 5—11 中两个半直线中的任意资产组合。这个新的包含无风险证券的资产组合集合的有效边界，就是相切于“马科维茨子弹”的上半直线，并且通过坐标为 $(0, r_F)$ 的点。根据资本资产定价模型假设，每一个理性投资者都将在这个半直线上选择资产组合，称这个半直线为**资本市场线**。如果 r_F 不太高，则上半直线相切于“马科维茨子弹”（如果 r_F 太高，上半直线将不再与“马科维茨子弹”相切）。

119

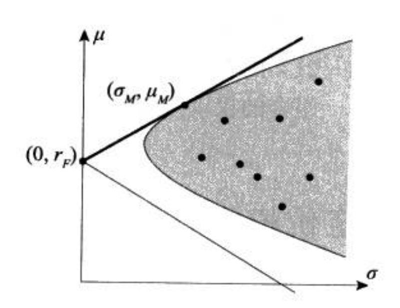


图 5—11　具有无风险证券的资产组合的有效边界

切点坐标 (σ_M, μ_M) 起着特殊的作用。资本市场上的每一个资产组合都可由无风险证券和标准差为 σ_M，期望收益为 μ_M 的资产组合构成。因为每一个投资者都在资本市场线上选择资产组合，每个人持有同样相对比例的风险证券。但这意味着标准差为 σ_M，期望收益为 μ_M 的资产组合的风险证券的权重等于它们在整个市场的相对份额。根据这个性质，我们称它为**市场资产组合**。在实际应用中，我们用合适的股票市场交易指数作为近似。

连接无风险证券与市场资产组合的资本市场线满足方程

$$\mu=r_F+\frac{\mu_M-r_F}{\sigma_M}\sigma \tag{5.18}$$

对于资本市场线上风险为 σ 的资产组合，$\frac{\mu_M-r_F}{\sigma_M}\sigma$ 项称为**风险溢价**（risk premium）。这个在无风险收益水平之上追加的收益提供了风险暴露的补偿。

例 5.13

对于由例 5.10 中的三个证券和一个无风险收益 $r_F=5\%$ 的无风险证

券构成的小型市场，我们将应用命题 5.12 计算市场资产组合。市场资产组合的权重 $\boldsymbol{w}$ 属于有效边界，满足条件 (5.17)，这意味着

$$\gamma \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{m} - \mu \boldsymbol{u})\boldsymbol{C}^{-1}$$

由命题 5.12 的证明我们知道 $\mu = r_F$，因为资本市场线在表示市场资产组合的点相切于有效边界，在 r_F 点与 μ 轴相交。代入由例 5.10 得出的数值，于是有

$$\gamma \boldsymbol{w} \cong [0.293 \quad 1.341 \quad 2.061]$$

120 因为 $\boldsymbol{w}$ 必须满足式 (5.14)，于是有 $\gamma \cong 3.694$，市场组合的权重为

$$\boldsymbol{w} \cong [0.079 \quad 0.363 \quad 0.558]$$

练习 5.16

假设无风险收益 $r_F = 5\%$，计算由练习 5.11 中三个证券构成的市场资产组合的权重，并计算市场资产组合的期望收益和标准差。

5.4.2 贝塔因子

弄清给定资产组合或单个证券的收益如何影响整个市场的趋势是重要的。为此目的，对应于市场资产组合的收益 K_M，我们可以画出每个市场状况的 K_V 值，并且计算出最佳拟合线，称为**回归线** (regression line) 或者**特征线** (characteristic line)。在图 5—12 中，K_M 值沿 x 轴标记，K_V 值沿 y 轴标记，则最佳拟合线的方程为

$$y = \beta_V x + \alpha_V$$

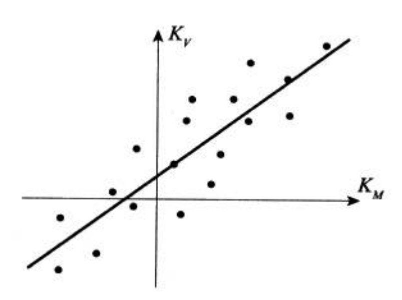


图 5—12 最佳拟合线

对任意给定的 β 和 α 值，随机变量 $\alpha + \beta K_M$ 可以认为是给定资产组合收益率的预测值。K_V 的真实值和预测值 $\alpha + \beta K_M$ 之差 $\varepsilon = K_V - (\alpha + \beta K_M)$

121　称为**残差随机变量**（residual random variable），则最佳拟合线的条件为

$$E(\varepsilon^2)=E(K_V^2)-2\beta E(K_VK_M)+\beta^2E(K_M^2)+\alpha^2 \\ -2\alpha E(K_V)+2\alpha\beta E(K_M)$$

作为 β 和 α 的函数在 $\beta=\beta_V$，$\alpha=\alpha_V$ 达到最小值。换句话说，最佳拟合线可以使得预测值尽可能接近于真实值 K_V。最小值的必要条件是，对 β 和 α 的偏导数在 $\beta=\beta_V$，$\alpha=\alpha_V$ 是零，这样就得到了线性方程组

$$\alpha_VE(K_M)+\beta_VE(K_M^2)=E(K_VK_M)$$
$$\alpha_V+\beta_VE(K_M)=E(K_V)$$

这就可以解出最佳拟合线斜率 β_V 和截距 α_V，即

$$\beta_V=\frac{\mathrm{Cov}(K_V,K_M)}{\sigma_M^2},\quad \alpha_V=\mu_V-\beta_V\mu_M$$

这里我们使用了通常使用的符号 $\mu_V=E(K_V),\mu_M=E(K_M)$ 和 $\sigma_M^2=\mathrm{Var}(K_M)$。

练习 5.17

假设给定的资产组合的收益 K_V 和市场资产组合收益 K_M 在不同状况下的值如下：

状况	概率	收益 K_V	收益 K_M
ω_1	0.1	−5%	10%
ω_2	0.3	0%	14%
ω_3	0.4	2%	12%
ω_4	0.2	4%	16%

计算最优拟合线的斜率 β_V 和截距 α_V。

定义 5.3

称

$$\beta_V=\frac{\mathrm{Cov}(K_V,K_M)}{\sigma_M^2}$$

为给定的资产组合或单个证券的**贝塔因子**（beta factor）。

122　贝塔因子是特殊的资产组合或单个证券的收益随着整个市场行为预期变化的指标。因为 $\mu_V=\beta_V\mu_M+\alpha_V$，如果证券的收益为正的贝塔因子，则当市场资产组合的收益增加时，证券的收益也随着增加；如果证券的收益为负的贝塔因子时，则当市场资产组合的收益下降时，证券的收益会增加。

下面我们讨论贝塔因子的另一个解释。证券或者资产组合的风险 $\sigma_V^2=\mathrm{Var}(K_V)$ 可以写成

$$\sigma_V^2=\mathrm{Var}(\varepsilon_V)+\beta_V^2\sigma_M^2$$

将残差随机变量表达式 $\varepsilon_V=K_V-(\alpha_V+\beta_V K_M)$ 带入上式容易验证这个公式。第一项 $\mathrm{Var}(\varepsilon_V)$ 称为残差方差或者可分散风险，对于市场资产组合它为零，这部分风险可以投资于市场资产组合分散掉。第二项 $\beta_V^2\sigma_M^2$ 称为系统风险或者不可分散的风险，市场资产组合仅包含这种风险。贝塔因子 β_V 可以认为是对证券或者资产组合的系统风险的测量。

对贝塔因子的这个解释十分重要。在资本资产定价模型中，我们用 β_V 测量的系统风险可以与期望收益 μ_V 联系起来，因此与单个证券和资产组合的定价相关。较高的系统风险需要较高的期望收益作为投资于这种风险暴露的溢价。而对 μ_V 没有影响的可分散风险得不到另外的溢价，这是因为可分散风险可以利用多个证券分散投资消除，特别地，可以利用在市场资产组合上的投资消除。在下一节中我们将论述 β_V 和 μ_V 之间的联系。

练习 5.18

证明权重为 w_1，…，w_n 的 n 个证券构成的资产组合的贝塔因子为 $\beta_V=w_1\beta_1+\cdots+w_n\beta_n$，其中 β_1，…，β_n 是这些证券的贝塔因子。

5.4.3 证券市场线

考虑一个权重为 $\mathbf{w}_V$ 的套利资产组合，市场资产组合的权重用 $\mathbf{w}_M$ 表示，市场资产组合属于风险证券构成的可行集合的有效边界。则由命题 5.12，有

$$\gamma\mathbf{w}_M\mathbf{C}=\mathbf{m}-\mu\mathbf{u}$$

123 对某些 $\gamma>0$ 和 μ 成立。因此，权重为 $\mathbf{w}_V$ 的资产组合的贝塔因子可以表示为

$$\beta_V=\frac{\mathrm{Cov}(K_V,K_M)}{\sigma_M^2}=\frac{\mathbf{w}_M\mathbf{C}\mathbf{w}_V^T}{\mathbf{w}_M\mathbf{C}\mathbf{w}_M^T}=\frac{\gamma(\mathbf{m}-\mu\mathbf{u})\mathbf{w}_V^T}{\gamma(\mathbf{m}-\mu\mathbf{u})\mathbf{w}_M^T}=\frac{\mu_V-\mu}{\mu_M-\mu}$$

为计算 μ，须考虑无风险证券，其收益为 r_F，贝塔因子 $\beta_F=0$。在上面的方程中用 β_F 和 r_F 代替 β_V 和 u_V，我们可以计算出 $\mu=r_F$。于是，我们就证明了如下的著名的性质。

定理 5.13

资产组合（或者单个证券）的期望收益 μ_V 是资产组合贝塔系数 β_V 的线性函数，即

$$\mu_V = r_F + (\mu_M - r_F)\beta_V \tag{5.19}$$

反映任意资产组合或者单个证券的期望收益与贝塔系数关系的位于 β，μ 平面上的直线称为**证券市场线**，如图 5—13 所示。为便于比较，在图中证券市场线的旁边为资本市场线。许多不同的资产组合或单个证券用圆点在两个图中表示。

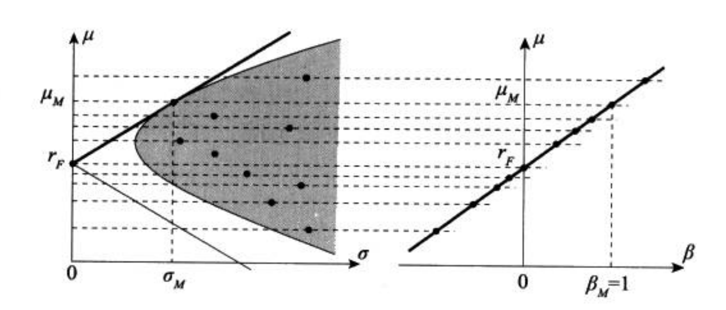


图 5—13　资本市场线和证券市场线

类似于资本市场线的表达式 (5.18)，在式 (5.19) 中的项 $(\mu_M - r_F)\beta_V$ 是风险溢价。而式 (5.18) 仅应用于资本市场线上的资产组合。这里的式 (5.19) 更一般化，可应用于所有的资产组合和单个证券。

练习 5.19

证明在资本资产定价模型中，所有证券的特征线交于一个公共点。这个点的坐标是什么？

124

资本资产定价模型描述了市场的均衡状况。每一个投资者持有的资产组合的权重与市场资产组合的相同。投资者的任何交易只会影响他们在无风险证券和市场资产组合之间现金的分配。因此，需求和供给是平衡的，只要期望收益的估计值和贝塔因子满足式 (5.19)。

然而，一旦关于市场的某些新的消息可以被投资者利用，可能就会影响对期望收益和贝塔系数的估计。新的估计值将不再满足式 (5.19)。例如，

$$\mu_V > r_F + (\mu_M - r_F)\beta_V$$

对于特殊的证券成立。在这种情况下，投资者将会增加这个证券的头寸，

这将获得比对系统风险补偿更高的期望收益。需求将超过供给，这个证券的价格将上升，期望收益将下降。另一方面，如果不等式相反，即

$$\mu_V < r_F + (\mu_M - r_F)\beta_V$$

则投资者会卖出这个证券。在这种情况下，供给将超过需求，价格下降，期望收益将会增加。这将持续到价格和期望收益达到新的水平，恢复均衡。

在实践中，上面的不等式是重要的，它们可以给投资者发出清楚的信号——证券定价过低还是定价过高，即应该买入还是卖出。

第 6 章 远期合约和期货合约

6.1 远期合约

125

远期合约是在将来固定的日期（称为**交割日**），以预先指定的价格（称为**远期价格**）买入或卖出一种资产的协议。同意卖出资产的协议一方被说成取得远期合约空头头寸；在交割日承担买入资产责任的一方被说成有远期合约多头头寸。签订远期合约的主要原因是可以不受风险资产的未知的未来价格的影响，有各种这样的例子。例如，农场主希望事先固定农作物的销售价；进口商希望在将来以固定的汇率筹措外币；基金经理希望在将来以固定的价格卖出股票。远期合约是双方之间的直接协议。在双方一致同意的时间，一般用实物交割方式结算。作为一种替代方式，有时也可用现金结算。

假设时间 0 为远期合约交易的时间；T 为交割时间；$F(0, T)$ 为远期价格。在时间 t，标的资产的价格用 $S(t)$ 表示。在远期合约交易时，即在时间 0，任何一方都没有支付。在交割日，如果 $F(0, T) < S(T)$，则持有远期合约多头头寸的一方获利。他们能以 $F(0, T)$ 价格买入资产，以市场价格卖出资产，产生 $S(T) - F(0, T)$ 的即时利润。同时，持有远期合约空头头寸的一方将损失 $S(T) - F(0, T)$，因为他们将以低于市场的价格卖出资产。如果 $F(0, T) > S(T)$，那么情况相反，在

126　交割日远期合约多头头寸的回报为 $S(T)-F(0,T)$，远期合约空头头寸的回报为 $F(0,T)-S(T)$，如图 6—1 所示。

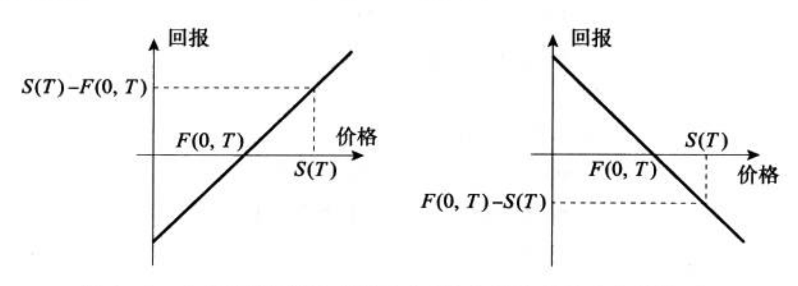


图 6—1　在交割时远期合约多头头寸和远期合约空头头寸的回报

如果合约在时间 $t<T$，而不是在时间 0 交易，那么远期合约的价格为 $F(t,T)$。在交割日，远期合约多头头寸的回报是 $S(T)-F(t,T)$，远期合约空头头寸的回报是 $F(t,T)-S(T)$。

6.1.1　远期价格

各种资产的远期价格公式可以利用无套利原则推导出。在本节中，我们从最简单的情况开始。

不支付红利的股票。考虑这样一种证券，它没有储藏成本，持有不产生利润（价格的随机波动产生的资本利得除外）。典型的例子是不支付红利的股票。在连续复合情况下，无风险收益率用 r 表示，并且假设在这个问题研究的时间期间内 r 为常数。

取得在时间 T 交割，价格为 $F(0,T)$ 的股票远期合约多头头寸的另一个选择是，在时间 0 借入 $S(0)$ 美元购买股票，并持有到时间 T。在时间 T 归还贷款及利息的总金额 $S(0)e^{rT}$ 与远期价格 $F(0,T)$ 相同。如下定理作出了合适的论证。

定理 6.1

不支付红利的股票的远期价格为

$$F(0,T)=S(0)e^{rT} \tag{6.1}$$

式中，r 是在连续复合利率条件下的常数无风险利率。如果合约从 $t\leqslant T$ 算起，则

$$F(t,T)=S(t)e^{r(T-t)} \tag{6.2}$$

证明

127　我们将证明式（6.1）。假设 $F(0,T)>S(0)e^{rT}$。在这种情况下，在

时间 0

● 借入金额 $S(0)$ 直到时间 T；

● 以 $S(0)$ 价格购买 1 股股票；

● 取得远期合约空头头寸，即同意在时间 T 以 $F(0, T)$ 的价格卖出 1 股股票。

然后，在时间 T

● 以 $F(0, T)$ 价格卖出股票；

● 支付 $S(0)e^{rT}$ 结清贷款及利息。

这将带来无风险利润

$$F(0, T)-S(0)e^{rT}>0$$

与无套利原则矛盾。假设 $F(0, T)<S(0)e^{rT}$，在这种情况下，我们构造与前面相反的策略，即在时间 0

● 以价格 $S(0)$ 卖空 1 股股票；

● 以无风险利率投资这个收入；

● 以远期价格 $F(0, T)$ 签订远期合约多头头寸。

然后，在时间 T

● 兑现无风险投资本金和利息，获得 $S(0)e^{rT}$ 美元；

● 利用远期合约以 $F(0, T)$ 买入股票；

● 结清股票的空头头寸归还给所有者。

最后，你将拥有正的金额

$$S(0)e^{rT}-F(0, T)>0$$

这仍与无套利原则矛盾。

式 (6.2) 的证明是类似的，即简单地用时间 t 代替时间 0，注意远期合约交易和结算之间的时间为 $T-t$。 □

在有卖空股票限制的市场，不等式 $F(0, T)<S(0)e^{rT}$ 不一定会产生套利机会。

练习 6.1

假设 $S(0)=17$ 美元；$F(0, 1)=18$ 美元；$r=8\%$；卖空需要 30%证券保证金，保证金按利率 $d=4\%$ 产生利息。存在套利机会吗？计算不存在套利机会的最高利率 d。

练习 6.2

128

假设 2000 年 4 月 1 日的股票价格比 2000 年 1 月 1 日的股票价格低 10%；无风险利率为常数 6%。以 2000 年 4 月 1 日的远期价

格下降的百分比作为参照，在 2000 年 10 月 1 日交割的 2000 年 1 月 1 日购买的远期合约的价格是多少？

注 6.1

我们总是考虑 $F(t, T)=S(t)e^{r(T-t)}>S(t)$ 的情况。$F(t, T)-S(t)$ 称为**基差**（basis），当 $t\nearrow T$ 时，基差收敛于 0。

注 6.2

在按期复合的情况下，远期价格为

$$F(0, T)=S(0)\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mT}$$

根据零息债券价格，这个公式可以变成

$$F(0, T)=S(0)B(0, T)^{-1}$$

上式实际上更具一般性，因为不必假设无风险利率是常数。

包含红利。对于在远期合约有效期内资产产生收入的情况，我们一般化远期价格公式。收入可能是红利或者是其他收益。我们还将考虑资产含有某些成本（称为持有成本），如储藏成本、保险成本的情况，成本按负收入处理。

假设在远期合约开始和交割之间的一个时间 t，股票支付红利 div。在时间 t，股票价格下降的幅度正好等于红利支付的金额。远期价格公式中包含股票价格减去支付的红利的现值。

定理 6.2

股票在时间 t 支付红利 div 的远期价格为

$$F(0, T)=[S(0)-e^{-rt}\mathrm{div}]e^{rT} \tag{6.3}$$

式中，$0<t<T$。

129

证明

假设

$$F(0, T)>[S(0)-e^{-rt}\mathrm{div}]e^{rT}$$

我们将构造一个套利策略，在时间 0

- 签订价格为 $F(0, T)$ 的远期合约空头头寸，在时间 T 交割；
- 借入 $S(0)$ 美元，购买 1 股股票。

在时间 t

- 兑现现金红利 div，并将其进行无风险利率投资，持续时间为 $T-t$。

在时间 T

- 以 $F(0, T)$ 的价格卖出股票；

● 支付 $S(0)e^{rT}$ 结清贷款和利息，并得到 $e^{r(T-t)}\text{div}$。

最后的余额为正，即

$$F(0, T)-S(0)e^{rT}+e^{r(T-t)}\text{div}>0$$

与无套利原则矛盾。另一方面，假设

$$F(0, T)<[S(0)-e^{-rt}\text{div}]e^{rT}$$

在这种情况下，在时间 0

● 签订价格为 $F(0, T)$ 的远期合约多头头寸，在时间 T 交割；

● 卖空 1 股股票并将所得 $S(0)$ 以无风险利率进行投资；

在时间 t

● 借入 div 美元，支付红利给股票的所有者。

在时间 T

● 以 $F(0, T)$ 价格购买 1 股股票，并且结清股票的空头头寸；

● 兑现无风险投资及利息，获得 $S(0)e^{rT}$，支付 $e^{r(T-t)}\text{div}$ 结清贷款和利息。

最后得到正的金额，即

$$-F(0, T)+S(0)e^{rT}-e^{r(T-t)}\text{div}>0$$

证毕。 □

130

这个公式很容易推广到多次支付红利的情况，即

$$F(0, T)=[S(0)-\text{div}_0]e^{rT} \tag{6.4}$$

式中，div_0 为在远期合约期限内支付的所有红利的现值。

练习 6.3

考虑一只股票，它在 2000 年 1 月 1 日的价格为 120 美元；在 2000 年 7 月 1 日支付红利 1 美元；在 2000 年 10 月 1 日支付红利 2 美元；无风险利率为 12%。如果 2000 年 11 月 1 日交割的远期合约在 2000 年 1 月 1 日的价格是 131 美元，是否存在套利机会？如果存在套利机会，计算套利利润。

练习 6.4

假设无风险收益率为 8%，而一个小投资者仅能以 7%的利率投资，以 10%的利率借款。如果 $F(0, 1)=89$ 美元，$S(0)=83$ 美元，半年（即在时间$\frac{1}{2}$）支付红利 2 美元，定理 6.2* 中的两

* 此处原文为“命题 6.2”，有误。——译者注

个策略是否给出了套利机会？

红利收益。红利经常是按指定利率连续支付，而不是离散支付的。例如，在股票资产组合高度分散的情况下，我们自然假设是连续支付而不是在一年内频繁地分散支付。另一个例子是外币，按相应的利率产生利息。

我们首先针对外币的情形推导价格公式。假设在纽约 1 英镑的价格为 $P(t)$ 美元；投资于英镑和美元的无风险利率分别为 r_{GBP} 和 r_{USD}。我们现在比较如下策略：

A：以利率 r_{USD} 投资 $P(0)$ 美元，到时间 T。

B：以 $P(0)$ 美元买入 1 英镑；以利率 r_{GBP} 投资到时间 T，取得英镑远期合约空头头寸 $e^{r_{\mathrm{GBP}}T}$；交割时间为 T；远期价格为 $F(0, T)$。

这两个策略的初始支付相同，于是终值应该相同，即

$$P(0)e^{r_{\mathrm{USD}}T}=e^{r_{\mathrm{GBP}}T}F(0, T)$$

由此得出

$$F(0, T)=P(0)e^{(r_{\mathrm{USD}}-r_{\mathrm{GBP}})T} \tag{6.5}$$

131

下面假设股票以付息率 $r_{\mathrm{div}}>0$ 连续支付红利，称为（连续的）**红利收益**。如果红利再投资于股票，那么在时间 0 投资的 1 股股票在时间 T 会变成 $e^{r_{\mathrm{div}}T}$ 股股票。（这种情况类似于连续复合。）因此，为了在时间 T 拥有 1 股股票，那么在时间 0 应该拥有 $e^{-r_{\mathrm{div}}T}$ 股股票。这个观察结果可以用于下面的套利证明。

定理 6.3

以付息率 r_{div} 连续支付红利的股票远期价格为

$$F(0, T)=S(0)e^{(r-r_{\mathrm{div}})T} \tag{6.6}$$

证明

假设

$$F(0, T)>S(0)e^{(r-r_{\mathrm{div}})T}$$

在这种情况下，在时间 0

- 签订一个空头远期合约；
- 支付 $S(0)e^{-r_{\mathrm{div}}T}$ 买入 $e^{-r_{\mathrm{div}}T}$ 股股票。

用在时间 0 和时间 T 之间收到的连续支付的红利，再投资于股票，则在时间 T 将拥有 1 股股票，上面已经作出解释。在那时

- 以价格 $F(0, T)$ 卖出股票，结清空头远期头寸；
- 支付 $S(0)e^{(r-r_{\mathrm{div}})T}$，结清贷款和利息。

最终的余额 $F(0, T)-S(0)e^{(r-r_{\mathrm{div}})T}>0$，这就是套利利润。

现在假设

$$F(0, T) < S(0)e^{(r-r_{div})T}$$

在这种情况下，则在时间 0

- 取得一个远期合约多头头寸；
- 卖空 $e^{-r_{div}T}$股股票，将收入 $S(0)e^{-r_{div}T}$进行无风险投资。

在时间 0 和时间 T 之间，需要支付红利给股票的所有者。利用卖空股票筹集的现金，股票持有者的空头头寸在时间 T 会增加到 1。在那时，

- 以 $F(0, T)$ 价格买入股票归还给所有者，结清远期合约多头头寸和股票的空头头寸；
- 从无风险投资中得到 $S(0)e^{(r-r_{div})T}$。

得到的还是正的金额 $S(0)e^{(r-r_{div})T} - F(0, T) > 0$，与无套利原则矛盾。

□

132

一般地，如果合约在时间 $t < T$ 开始，则

$$F(t, T) = S(t)e^{(r-r_{div})(T-t)} \tag{6.7}$$

练习 6.5

美国的德国汽车进口商想签订半年的远期合约买入欧元，投资美元和欧元的利率分别为 $r_{USD} = 4\%$和 $r_{EUR} = 3\%$，现在的汇率为 0.983 4 欧元兑换 1 美元。用美元表示的欧元远期价格（即远期汇率）是多少？

6.1.2 远期合约的价值

每一个远期合约开始生效时的价值是 0，随着时间的推移，标的资产的价格可能会发生变化，因此，一般来说，远期合约的价值也会随着改变，不总是零。特别地，在交割日，远期合约多头的价值是 $S(T) - F(0, T)$，它可能取值为正、零或者负。我们将推导体现远期价值变化的公式。

假设在时间 $t(0 < t < T)$ 开始生效的远期合约的价格 $F(t, T)$ 高于 $F(0, T)$。这对于在时间 0 开始的具有远期合约多头头寸的投资者是个好消息。若一个投资者在时间 t 新签订一个远期合约，交割日在时间 T，与之相比，在时间 T 前一类投资者将得到收益 $F(t, T) - F(0, T)$。为计算原始的远期合约头寸在时间 t 的价值，我们只要将这个收益折现到时间 t 即可。这个折现金额将会被在时间 0 购买远期合约多头头寸的投资者收到（如果是负的，为支付）并在时间 t 结算，即早于交割日 T。我们将用严格的套利证明进行论证。

定理 6.4

对每个满足 $0 \leqslant t \leqslant T$ 的时间 t，远期价格为 $F(0, T)$ 的远期合约多头头寸在时间 t 的价值为

$$V(t)=[F(t, T)-F(0, T)]\mathrm{e}^{-r(T-t)} \tag{6.8}$$

133

证明

假设

$$V(t)<[F(t, T)-F(0, T)]\mathrm{e}^{-r(T-t)}$$

如果这样，那么在时间 t

- 借入金额 $V(t)$，签订价格为 $F(0, T)$，交割日为 T 的远期多头合约；
- 开始空头远期头寸，其价格为 $F(t, T)$，没有成本。

接下来，在时间 T

- 结清远期合约，如果是多头，得到金额 $S(T)-F(0, T)$（如果是负的，为支付），结清空头头寸得到 $-S(T)+F(t, T)$；
- 归还贷款及利息总额为 $V(t)\mathrm{e}^{r(T-t)}$。

最终的金额为 $F(t, T)-F(0, T)-V(t)\mathrm{e}^{r(T-t)}>0$，这就是套利利润。

我们把

$$V(t)>[F(t, T)-F(0, T)]\mathrm{e}^{-r(T-t)}$$

的情形作为练习。 □

练习 6.6

证明 $V(t)>[F(t, T)-F(0, T)]\mathrm{e}^{-r(T-t)}$ 将导致一个套利机会。

注意，$V(0)=0$ 为远期合约的初始价值；$V(T)=S(T)-F(0, T)$（因为 $F(T, T)=S(T)$）为最终回报。

对于不支付红利的股票，由式（6.8）可知

$$V(t)=[S(t)\mathrm{e}^{r(T-t)}-S(0)\mathrm{e}^{rT}]\mathrm{e}^{-r(T-t)}=S(t)-S(0)\mathrm{e}^{rt} \tag{6.9}$$

这给我们的启示是，如果股票价格的增长与无风险投资一样，那么远期合约的价值为零。若增长高于无风险利率，则远期合约多头头寸的持有者会获得收益。

注 6.3

考虑一个合约，其交割价格为 X，而不是 $F(0, T)$，则合约在时间 t

的价值可以由用 X 替代 $F(0, T)$ 的式（6.8）给出，

$$V_X(t)=[F(t, T)-X]e^{-r(T-t)}$$

134 这样的合约初始价值可以不是零。在股票不支付红利的情况下，有

$$V_X(0)=[F(0, T)-X]e^{-rT}=S(0)-Xe^{-rT} \tag{6.10}$$

对于在时间 0 和时间 T 之间支付红利的股票，合约的初始价值为

$$V_X(0)=S(0)-\text{div}_0-Xe^{-rT}$$

div_0 是红利在时间 0 的折现值。对以支付率 r_{div} 连续支付红利的股票，合约的初始价值为

$$V_X(0)=S(0)e^{-r_{\text{div}}T}-Xe^{-rT}$$

练习 6.7

假设在年初股票的价格为 45 美元；无风险利率为 6%；半年以后，支付 2 美元红利。对于一年交割的合约多头，计算它在 9 个月后的价值。考虑两种情况：（a）那时的股票价格为 49 美元；（b）那时的股票价格为 51 美元。

6.2 期货

远期合约两方中的一方会损失货币，总存在使得一方遭受损失的违约风险。期货合约可以避免这样的风险。

我们暂时假设时间是具有时段长度为 τ 的离散时间，一般为 1 天。

与远期合约一样，期货包括一个标的资产和一个指定的交割日，比如价格为 $S(n)$ 的股票，其中 $n=0, 1, \cdots$，和时间 T。除了通常的股票价格之外，对每一个满足 $n\tau\leqslant T$ 的时段，其中 $n=0, 1, \cdots$，市场指定所谓的**期货价格** $f(n, T)$。除了 $f(0, T)$，这些价格在时间 0 是未知的，我们将认为它们是随机变量。

与远期合约一样，开始的期货头寸没有成本，不同之处在于合约期限内的现金流。远期合约多头只在交割日支付一个 $S(T)-F(0, T)$；期货合约包含由市场决定的随机现金流，即在每一个时段（$n=1, 2, \cdots$）满足 $n\tau\leqslant T$，期货合约多头持有者将得到金额

$$f(n, T)-f(n-1, T)$$

135 如果是正的，为收益；如果是负的，为支付。相反的支付应用于期货合约空头头寸。我们附加了以下两个条件：

1. 在交割日，期货价格为 $f(T, T)=S(T)$。

2. 在每一个时段（$n=0, 1, \cdots$）使得 $n\tau \leqslant T$，期货合约头寸的价值为零。（在每一个时段（$n \geqslant 1$），这个值在盯市以后计算。）

第二个条件意味着，在时间 0 和时间 T 之间任何时段平仓、不开仓或者转换头寸都没有成本。

注 6.4

为保证履行包含在期货合约头寸中的义务，当然要强加一些特殊的规则。每一个签订期货合约的投资者都要支付保证金，称为**初始保证金**，支付给结算所作为担保。在期货合约多头头寸的情况下，在每个时段，一般是一天一次，如果 $f(n, T)-f(n-1, T)$ 为正，则在保证金中加上这个金额；如果为负，则在保证金中减去这个金额（对于空头头寸则相反）。超过初始保证金的部分投资者可以收回。另一方面，如果保证金低于确定的水平，交易所就会通知投资者维持保证金。交易所将提出保证金催交，要求投资者作支付并使保证金达到初始保证金的水平。期货合约头寸在任何时间都可能结清，在这种情况下，保证金会归还给投资者。特别地，如果投资者对保证金催交没有反应，交易所就会立刻平仓，这种做法消除了违约风险。

例 6.1

假设初始保证金设置为期货价格的 10%，补仓保证金为 5%，下表表明了期货价格 $f(n, T)$ 的状况。表中“保证金 1”（margin 1）和“保证金 2”（margin 2）列表明在每天开始和结束时的保证金。**支付**（payment）列包括交纳的保证金数量（负数）或收回的保证金数量（正数）。

136

n	$f(n, T)$	现金流	保证金 1	支付	保证金 2
0	140	开仓：	0	−14	14
1	138	−2	12	0	12
2	130	−8	4	−9	13
3	140	+10	23	+9	14
4	150	+10	24	+9	15
		结算：	15	+15	0
			累计：	10	

在第 0 天，开仓期货合约头寸，按 10%交保证金。在第 1 天，期货价格下降 2 美元，从保证金中减去。在第 2 天，期货价格下降 8 美元，启动催交保证金，因为保证金低于 5%，投资者交纳 9 美元，保证金恢复到 10%的水平。第 3 天，期货价格上涨，收回 9 美元，保留 10%的保证金。第 4 天，期货价格再次上涨，允许投资者再次收回 9 美元。这天结束时，投资者决定结清头寸，收到保证金余额。总支付是 10 美元，即从

第 1 天到第 4 天期货价格上涨 10 美元。

注 6.5

期货市场的一个重要特征是流动性。由于标准化和交易所的存在，流动性是可能的。具有特殊交割日的期货合约才能交易。而且，对商品期货合约——例如黄金或者木材，不仅指定标准化的交割日，也指定标准化的资产的现货特征。交易所是一个中介机构，匹配各种大小的、大量的多头和空头期货头寸。交易所还催交维持保证金以消除违约风险。这与两方直接协商的远期合约不同。

6.2.1 定价

我们将证明，在某些条件下远期合约和期货合约的价格是相同的。假设 r 为在连续复合之下的无风险利率。

定理 6.5

如果利率为常数，则 $f(0, T)=F(0, T)$。

137

证明

为简单起见，假设盯市在两个中间的时间瞬间 $0<t_1<t_2<T$ 执行。实际上，以下的论证可以扩展到更多的时间频率。

取得具有远期价格 $F(0, T)$ 的远期合约多头头寸，金额 $e^{-rT}F(0, T)$ 投资于无风险资产。在时间 T 结算无风险投资，得到 $F(0, T)$，利用远期合约买入 1 股股票，并且以市场价 $S(T)$ 卖出，则最终财富为 $S(T)$。

我们的目标是利用期货合约的合适策略复制这个支付。在时间 0

● 开仓 $e^{-r(T-t_1)}$ 期货合约多头头寸（没有成本）。

● 投资 $e^{-rT}f(0, T)$ 于无风险资产（这个投资在时间 T 增长为 $v_0=f(0, T)$）。

在时间 t_1

● 由于盯市收到（或者支付）$e^{-r(T-t_1)}[f(t_1, T)-f(0, T)]$；

● 投资（或者借入，取决于符号）$e^{-r(T-t_1)}[f(t_1, T)-f(0, T)]$（这个投资在时间 T 将增长到 $v_1=f(t_1, T)-f(0, T)$）；

● 增加期货合约多头头寸到 $e^{-r(T-t_2)}$（没有成本）。

在时间 t_2

● 由于盯市收到（或者支付）$e^{-r(T-t_2)}[f(t_2, T)-f(t_1, T)]$；

● 投资（或者借入，取决于符号）$e^{-r(T-t_2)}[f(t_2, T)-f(t_1, T)]$（这个投资在时间 T 将增长到 $v_2=f(t_2, T)-f(t_1, T)$）。

● 增加期货合约多头头寸到 1（没有成本）。

在时间 T

● 结清无风险投资，得到 $v_0+v_1+v_2=f(t_2, T)$；

● 结清期货头寸，收到（或者支付）$S(T)-f(t_2, T)$。

最终财富为 $S(T)$，与前面一样。因此，为避免套利，开始时两个策略的初始投资必须相同，即

$$e^{-rT}F(0, T)=e^{-rT}f(0, T)$$

这就证明了结论。 □

如果利率变化是不可预测的，则这个推导不可能实现。而如果利率变化是已知的，论证可以修改，期货和远期价格的等式成立。

138

在一个具有常数利率 r 的经济中，我们得到期货价格的简单公式

$$f(t, T)=S(t)e^{r(T-t)} \tag{6.11}$$

如果股票不支付红利。期货的价格是随机的，完全是由标的资产价格的随机性引起的。如果期货价格偏离式（6.11）给出的值，从市场的观点，它反映着远期利率的变化。

练习 6.8

假设利率 r 为常数。给定 $S(0)$，计算一天以后的股票价格 $S(1)$，使得 3 个月交割的期货在该天的盯市为零。

这个练习表明了期货合约头寸获利能力的重要准则：一个投资者想要利用预测到的股票价格的增加超过无风险利率的信息获利，他应该签订期货合约多头头寸。期货合约空头头寸带来的利益应该来自股票价格下降或者股票价格上升但低于无风险利率的情况。

6.2.2 利用期货套期保值

基差。套期保值相对简单的方法是签订远期合约。但远期合约不是很有效，况且还存在违约风险。另一个套期保值的可能性是利用期货市场，因为期货市场是得到很好发展的、具有流动性的市场，而且能够排除违约风险。

例 6.2

假设 $S(0)=100$ 美元；无风险利率 $r=8\%$是常数；盯市是一个月一

次，时段是 $\tau=\frac{1}{12}$。假设我们希望 3 个月以后卖出股票。为了对股票价格的各种风险暴露套期保值，我们签订一个 3 个月交割的股票空头期货合约。投资（或借入）来自盯市的支付，按无风险利率产生利息。两个不同价格状况的结果列表如下。表中“盯市”列表示来自盯市的支付；最后一列表示直到交割日利息的增长。

139

状况 1

n	$S(n)$	$f\left(n, \frac{3}{12}\right)$	盯市	利息
0	100	102.02		
1	102	103.37	−1.35	−0.02
2	101	101.67	+1.69	+0.01
3	105	105.00	−3.32	0.00
		累计：	−2.98	−0.01

在这个状况下，我们以 105.00 美元的价格卖出股票，但盯市会引发损失，以至于总和减少到 105.00−2.98−0.01＝102.01 美元。注意，如果盯市支付不按无风险利率投资，实际上总和为 105.00−2.98＝102.02 美元，这精确地等于期货价格 $f\left(0, \frac{3}{12}\right)$。

状况 2

n	$S(n)$	$f\left(n, \frac{3}{12}\right)$	盯市	利息
0	100	102.02		
1	98	99.31	+2.70	+0.04
2	97	97.65	+1.67	+0.01
3	92	92.00	+5.65	0.00
		累计：	+10.02	+0.05

在这种状况下，我们以 92.00 美元卖出股票，且来自盯市与利息收益的总和为 92.00+10.02+0.05＝102.07 美元。不算利息，最后的总和为 92.00+10.02＝102.02 美元，再一次精确地等于期货价格 $f\left(0, \frac{3}{12}\right)$。

实际上，例 6.2 中的计算不十分复杂，为简单起见，已经忽略了初始保证金。一些限制来自期货合约的标准化。因此，困难是如何使合约条款与我们的需要相匹配。例如，期货的交割日是一个指定的 4 个月的确定的日期，例如在 3 月、6 月、9 月和 12 月的第 3 个星期五。如果我们想要结清在 4 月末的投资，我们需要套期保值期货合约的交易日在 4

月末附近，例如 6 月末。

例 6.3

140

假设我们希望 2 个月之后卖出股票，并且利用在 3 个月后交割的期货套期保值（状况与例 6.2 相同）：

状况 1

n	$S(n)$	$f\left(n, \frac{3}{12}\right)$	盯市	利息
0	100	102.02		
1	102	103.37	−1.35	−0.01
2	101	101.67	1.69	0.00
		累计：	0.34	−0.01

我们以 101.00 美元卖出股票，连同盯市与利息收益的总和为 110.33 美元。

状况 2

n	$S(n)$	$f\left(n, \frac{3}{12}\right)$	盯市	利息
0	100	102.02		
1	98	99.31	2.70	0.02
2	97	97.65	1.67	0.00
		累计：	4.37	0.02

在这种情况下，股票是 97.00 美元，连同盯市与利息收益的总和为 101.39 美元。

我们几乎达到了目标值，这个目标值是期货价格 $f(0, 2) \cong 101.34$ 美元，即 100 美元按无风险利率复合的价值。

注 6.6

现货价格和期货价格之差称为**基差**（与远期合约相同），即

$$b(t, T) = S(t) - f(t, T)$$

（有时基差定义为 $f(t, T) - S(t)$。）当 $t \to T$ 时，基差趋近于 0，因为 $f(T, T) = S(T)$。在一个具有固定利率的市场上，很明显

$$b(t, T) = S(t)(1 - e^{r(T-t)})$$

当 $t < T$ 时，为负。如果资产以红利支付率 $r_{div} > r$ 支付红利，则基差为正，即

$$b(t, T) = S(t)(1 - e^{(r-r_{div})(T-t)})$$

141 回到设计套期保值问题，假设我们希望在时间 $t<T$ 卖出资产。为了保护我们自己应对价格下跌，在时间 0，我们可以卖空价格为 $f(0, T)$ 的期货合约。在时间 t，我们卖空资产可以得到 $S(t)$，加上来自盯市的现金流 $f(0, T)-f(t, T)$（为简单起见，我们忽略中间现金流，假设 t 是第一个盯市发生的瞬间）。于是，我们得到

$$f(0, T)+S(t)-f(t, T)=f(0, T)+b(t, T)$$

价格 $f(0, T)$ 在时间 0 是已知的，于是包含在套期保值头寸的风险与未知的基差大小相关。这个不确定性主要与未知的远期利率相关。

如果套期保值的目的是最小化风险，那么最好是利用确定的最优套期保值率，即签订 N 份期货合约，其中 N 不必等于持有的基础资产的份数。为此，计算由基差 $b_N(t, T)=S(t)-Nf(t, T)$ 测量的风险：

$$\mathrm{Var}(b_N(t, T))=\sigma_{S(t)}^2+N^2\sigma_{f(t, T)}^2-2N\sigma_{S(t)}\sigma_{f(t, T)}\rho_{S(t)f(t, T)}$$

式中，$\rho_{S(t)f(t, T)}$ 为现货价格和期货价格的相关系数；$\sigma_{S(t)}$，$\sigma_{f(t, T)}$ 为标准差。方差为 N 的二次函数，在

$$N=\rho_{S(t)f(t, T)}\frac{\sigma_{S(t)}}{\sigma_{f(t, T)}}$$

处有最小值，这就是最优套期保值率。

练习 6.9

如果利率为常数，计算套期保值率。

股票指数期货。股票的交易所指数是选择的股票价格的加权平均，其权重是股票的市值的比例。这种类型的指数近似于与市场资产组合的价值成比例（参见第 5 章），如果选取的股票集合足够大。例如标准普尔指数（Standard and Poor Index）。标准普尔 500 是利用 500 个股票计算的，代表了纽约证券交易所交易的 80%的股票。对于期货市场来说，指数可以看做可交易的证券。这是因为指数可以与资产组合等同看待，即使在实际中交易成本会阻碍资产组合的交易。期货价格 $f(n, T)$ 用指数点表示，假设满足与前面一样的条件。盯市由差 $f(n, T)-f(n-1, T)$ 142 乘以固定的金额（标准普尔 500 期货为 500 美元）给出。如果包含在指数中的股票数量很多，则假设指数是一个连续支付红利的资产是可行的，也是方便的。

练习 6.10

假设股票交易所的股票指数为 13 500，在 9 个月后交割的期货价格是 14 100，利率是 8%，计算红利收益率。

本节的目的是研究基于在第 5 章中引入的资本资产定价模型对于指数期货套期保值的应用。正如我们已知的（见式（5.9）)，在长度为 τ 的时段内资产组合的预期收益为

$$\mu_V = r_F + (\mu_M - r_F)\beta_V$$

式中，β_V 为资产组合的贝塔（beta）系数；μ_M 为市场组合的期望收益；r_F 为单期无风险收益率。我们用 $V(n)$ 表示资产组合的第 n 个时段的价值。为简单起见，我们假设指数等于市场资产组合的价值，于是期货价格为

$$f(n, T) = M(n)(1+r_F)^{T-n}$$

$M(n)$ 是在第 n 个时段市场资产组合的价值（这里我们利用离散时间、普通收益以及资产组合理论中的按期复合）。

我们可以用原来的资产组合和 N 份交割日为 T 的空头指数期货合约构成的新的资产组合，其价值为 $\widetilde{V}(n)$。新资产组合的初始价值 $\widetilde{V}(0)$ 和原来资产组合的初始价值 $V(0)$ 是相同的，因为签订期货合约不用支付任何费用。这个新的资产组合的价值

$$\widetilde{V}(n) = V(n) - N(f(n, T) - f(n-1, T))$$

在第 n 个时段包含了盯市现金流。新资产组合在第一个时段的收益为

$$K_{\widetilde{V}} = \frac{\widetilde{V}(1) - \widetilde{V}(0)}{\widetilde{V}(0)} = \frac{V(1) - N(f(1, T) - f(0, T)) - V(0)}{V(0)}$$

我们将证明，新资产组合的贝塔系数 $\beta_{\widetilde{V}}$ 可以被期货头寸 N 的合适选择任意修改。

命题 6.6

143

如果

$$N = (\beta_V - a)\frac{(1+r_F)V(0)}{f(0, T)}$$

那么对任意给定的数 a，有 $\beta_{\widetilde{V}} = a$。

证明

我们由定义计算贝塔系数

$$\begin{aligned}\beta_{\widetilde{V}} &= \frac{\mathrm{Cov}(K_{\widetilde{V}}, K_M)}{\sigma_M^2} \\ &= \frac{\mathrm{Cov}(K_V, K_M)}{\sigma_M^2} - \frac{1}{V(0)}\frac{\mathrm{Cov}(N(f(1, T) - f(0, T)), K_M)}{\sigma_M^2}\end{aligned}$$

式中，K_M 为市场资产组合的收益；K_V 为没有期货的资产组合的收益。

因为 $\mathrm{Cov}(f(0, T), K_M)=0$，又因为协方差对每一个变量是线性的，于是有

$$\mathrm{Cov}(N(f(1, T)-f(0, T)), K_M)=N\mathrm{Cov}(f(1, T), K_M)$$

代入期货价格 $f(1, T)=M(1)(1+r_F)^{T-1}$，有

$$\mathrm{Cov}(f(1, T), K_M)=(1+r_F)^{T-1}\mathrm{Cov}(M(1), K_M)$$

再一次利用协方差对每一个变量的线性关系，有

$$\mathrm{Cov}(M(1), K_M)=M(0)\mathrm{Cov}\left(\frac{M(1)-M(0)}{M(0)}, K_M\right)=M(0)\sigma_M^2$$

接着替换得到

$$\beta_{\tilde{V}}=\beta_V-\frac{(1+r_F)^{T-1}NM(0)}{V(0)}=\beta_V-N\frac{f(0, T)}{V(0)(1+r_F)}$$

从中可得出要证明的结论。 □

推论 6.7

如果 $a=0$，则 $\mu_{\tilde{V}}=r_F$。

例 6.4

假设指数从 $M(0)=890$ 下降到 $M(1)=850$，即在第一个时段下降 4.49%。进一步假设无风险利率为 1%。这意味着，指数期货价格（3 个时段后交割）为

144

$$f(0, 3)=M(0)(1+r_F)^3=890\times1.01^3\cong916.97$$
$$f(1, 3)=M(1)(1+r_F)^3=850\times1.01^2\cong867.09$$

考虑一个资产组合，它的贝塔系数 $\beta_V=1.5$，初始价值 $V(0)=100$ 美元，这个资产组合将有负的期望收益，即

$$\begin{aligned}\mu_V&=r_F+(\mu_M-r_F)\beta_V\\&\cong1\%+(-4.49\%-1\%)\times1.5\cong-7.24\%\end{aligned}$$

为构造一个新的资产组合，使得 $\beta_{\tilde{V}}=0$，我们可以将原来的资产组合增补

$$N=\beta_V\frac{(1+r_F)V(0)}{f(0, 3)}\cong1.5\times\frac{1.01\times100}{916.97}\cong0.1652$$

份——即三个时段以后交割的空头指数远期合约。

假设原来的资产组合在第一个时段的实际收益等于期望收益，这给出了 $V(1)\cong92.76$ 美元。盯市给出的回报为

$$-N(f(1, 3)-f(0, 3))\cong-0.1652\times(867.09-916.97)$$

$$\cong 8.24\text{（美元）}$$

这收益来自持有 $N\cong 0.1652$ 远期合约空头头寸。这样得出的新的资产组合在时间 1 的价值为

$$\begin{aligned}\widetilde{V}(1)&=V(1)-N(f(1,3)-f(0,3))\cong 92.76+8.24\\&=101.00\text{（美元）}\end{aligned}$$

精确地按无风险增长。

练习 6.11

在指数从 890 增加到 920 的情况下，做同样的计算。

注 6.7

调整资产组合 β 的能力对于希望减少和扩大系统风险的投资者都是有价值的。例如，假设投资者能够设计一个资产组合，使其平均业绩优于市场组合。利用签订期货头寸使得得到的资产组合的 β 等于零，投资者完成套期保值以应对市场波动的风险。这一做法在市场不景气时也很重要，使得具有较优表现的资产组合能够产生利润，虽然市场是下跌的。另一方面，当市场上涨时，套期保值的期望收益将减少，因为期货头寸将产生损失。

145

需要强调的是，这种利用期货套期保值类型仅起平均的作用。特别地，调整贝塔系数到零，将不进行无风险投资。

让我们用指数期货的应用来结束本章。

例 6.5

在新兴市场卖空效用不大。20 世纪 90 年代末，波兰就是这种情况。当时已经开设了指数期货交易，由于指数之一（WIG20）仅由 20 只股票组成，可以通过签订指数期货的空头头寸，然后买入余下的 19 只股票的资产组合，造成这 20 只股票中任意一只股票的大量卖空。如果需要买入的构成指数的股票数量较大，这样做的交易成本就会太高。

第 7 章　期权：一般性质

147　在第 1 章和第 4 章中，我们给出了单期离散时间看涨期权和看跌期权的简单例子。在本章中，我们将揭示期权的某些基本性质，从更广阔的视角并且利用连续时间考察期权。不过，在离散时间下许多结论仍然成立。在第 8 章中我们将论述期权定价和套期保值。

7.1　定义

欧式看涨期权是一种合约，它给予其持有者以预先固定的价格（称为**施权价**）在未来某个指定的时间 T（称为施权日或到期日）购买一种资产（称为**标的资产**）的权利。**欧式看跌期权**也是一种合约，它给予其持有者以施权价 X 在施权日卖出一种资产的权利。

美式看涨期权和**美式看跌期权**分别给予其持有者以固定的施权价 X，在现在和指定的时间 T（称为**到期时间**）之间任意时间买入和卖出标的资产的权利。换言之，美式期权可以在到期日之前包括到期日的任意时间施权。

术语"标的资产"的含义很广，除了普通的资产如股票、商品、外币以外，还包括股票指数、利率，甚至一个滑雪场地的雪的厚度。期权

用现金的方式结算，这类似于赌博。例如，施权价为 800 的标准普尔指数欧式看涨期权的持有者，如果在施权日指数变为 815，期权将有收益。期权的卖者支付给持有者的金额等于两者之差 815－800＝15 乘以固定的货币额，比如说 100 美元，如果施权日指数低于 800 将不必支付。

148

期权由其回报确定，欧式看涨期权的回报为

$$\begin{cases} S(T)-X & S(T)>X \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases}$$

回报为随机变量，因为在施权日 T，标的资产的价格是未定的（这就解释了为何将期权看做是**未定权益**（contingent claims））。我们用符号

$$x^{+}=\begin{cases} x & x>0 \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases}$$

作为实数 x 的**正部**（positive part）。那么欧式看涨期权的回报可以写为 $(S(T)-X)^{+}$；看跌期权的回报为 $(X-S(T))^{+}$。

因为期权回报是非负的，所以必须支付给期权卖出者**期权费**（premium）。如果不支付期权费，购买期权的人无论怎样都不会遭受损失，而且当回报为正时会赚取利润，这与无套利原则矛盾。期权费就是期权的价格。

验证期权价格的边界和期权价格的某些一般性质是本章的主要目的。在第 8 章中我们将研究计算期权价格的方法。我们假设期权是可以自由交易的，即随时可按市场价格买卖。欧式看涨期权和欧式看跌期权的价格分别为 C^{E} 和 P^{E}；美式看涨期权和美式看跌期权的价格分别为 C^{A} 和 P^{A}。对于无风险借款和贷款应用同样的固定利率 r，并且使用连续复合。

例 7.1

1997 年 3 月 22 日，劳斯莱斯公司（Rolls-Royce）股票期权（其施权价为 220 便士，施权日为 1997 年 5 月 22 日）在伦敦国际金融期货交易所（London International Financial Futures Exchange，LIFFE）以 19.5 便士交易。假设利用 5.23％连续复利贷款融资购买期权，因此，在施权日应当归还 $19.5e^{0.0523\times\frac{2}{12}}\cong 19.67$ 便士，如果股票价格高于 $220+19.67=239.67$ 便士，将会给投资者带来利润。

练习 7.1

149

对欧式看跌期权计算施权日的股票价格。已知欧式看跌期权的施权价为 36 美元；在 3 个月以后的施权日产生 3 美元的利润。期权是利用 12％连续复利的贷款融资，并以 4.5 美元购买。

期权的购买者（卖出者）的收益是由期权支付的（或收到的）的期

权费 C^E 或 P^E 修改的回报。在时间 T，欧式看涨期权的购买者获得的收益为 $(S(T)-X)^+-C^E e^{rT}$，这里货币的时间价值计入成本。欧式看跌期权的购买者获得的收益为 $(X-S(T))^+-P^E e^{rT}$，这些收益如图 7—1 所示。欧式看涨期权的卖出者获得的收益为 $C^E e^{rT}-(S(T)-X)^+$；欧式看跌期权的卖出者获得的收益为 $P^E e^{rT}-(X-S(T))^+$。注意，对于看涨期权和看跌期权，购买者的损失可以限制在期权费的支付之内；但期权卖出者的损失可能会很高，在看涨期权的情况下甚至没有上限。

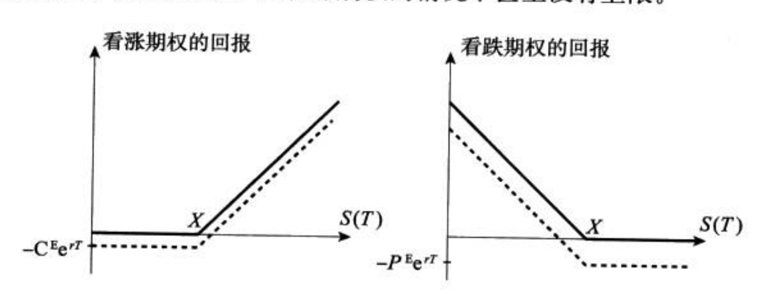


图 7—1 欧式看涨期权和看跌期权购买者的回报（实线）和收益（虚线）

练习 7.2

假设欧式看涨期权的施权价为 90 美元；过 6 个月施权；施权日的股票价格可能会变为 87 美元、92 美元或者 97 美元的概率各为 $\frac{1}{3}$。如果期权利用利率 9%的连续复合贷款融资，以 8 美元的价格购买，计算这个欧式看涨期权的持有者的期望收益（或损失）。

7.2 看跌期权—看涨期权平价

150

在本节中，我们将建立欧式看涨期权和看跌期权价格的重要关系。

考虑由具有相同施权价 X 和相同施权日 T 的卖出 1 份看跌期权、买入 1 份看涨期权构成的资产组合。将看涨期权多头头寸的回报和看跌期权空头头寸的回报相加，我们就得到一个远期价格为 X，交割日为 T 的远期合约多头头寸。实际上，如果 $S(T)\geqslant X$，那么看涨期权的回报为 $S(T)-X$，看跌期权没有价值。如果 $S(T)<X$，那么看涨期权没有任何价值，看跌期权的卖出者要支付 $X-S(T)$。在这两种情况下，资产组合的价值都为 $S(T)-X$，与远期合约多头头寸相同，如图 7—2 所示。因此，这个期权资产组合的当前价值应该就是远期合约的价值，

即$S(0)-Xe^{-rT}$，见注 6.3。这样就可以导出如下定理。虽然可以从上面直观地论证得出这个定理，但接下来我们将用尽可能的一般化的观点给出另外的证明。

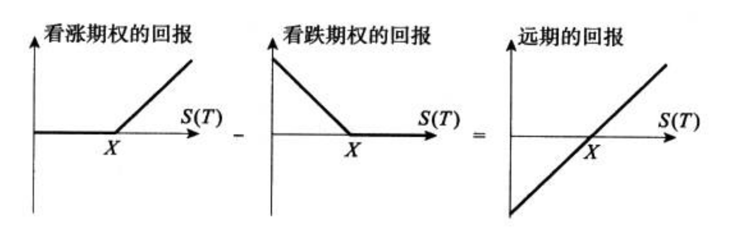


图 7—2　由看涨期权和看跌期权构成的远期多头的回报

定理 7.1　看跌期权—看涨期权平价

对于不支付红利的股票，如下的欧式看涨期权和看跌期权价格之间的关系式成立：

$$C^{E}-P^{E}=S(0)-Xe^{-rT} \tag{7.1}$$

假设这两个期权的施权价都是 X；施权日都是 T。

证明

假设

$$C^{E}-P^{E}>S(0)-Xe^{-rT} \tag{7.2}$$

在这种情况下，可以构造如下的套利策略，在时间 0

151

- 以价格 $S(0)$ 买入 1 股股票；
- 以价格 P^{E} 买入 1 份看跌期权；
- 以价格 C^{E} 卖出 1 份看涨期权；
- 以利率 r 在货币市场投资 $C^{E}-P^{E}-S(0)$（如果是负的，为借入）。

这些交易的余额为零。然后，在时间 T

- 结清货币市场头寸，得到金额 $(C^{E}-P^{E}-S(0))e^{rT}$（如果是为负值，为支付）；
- 以价格 X 卖出股票，当 $S(T)\leqslant X$ 时，行使看跌期权；当 $S(T)>X$ 时，结清看涨期权空头头寸。

根据式（7.2），余额 $(C^{E}-P^{E}-S(0))e^{rT}+X$ 为正值，与无套利原则矛盾。

现在假设

$$C^{E}-P^{E}<S(0)-Xe^{-rT} \tag{7.3}$$

那么如下的策略将产生套利。在时间 0

- 以价格 $S(0)$ 卖空 1 股股票；
- 以价格 P^{E} 卖出 1 份看跌期权；

● 以价格 C^{E} 买入 1 份看涨期权；

● 以利率 r 在货币市场投资 $S(0)-C^{E}+P^{E}$（如果是负的，为借入）。这些交易的余额是 0。在时间 T

● 结清货币市场头寸，得到 $(S(0)-C^{E}+P^{E})e^{rT}$（如果系负值，为支付）；

● 以价格 X 买入 1 股股票，当 $S(T)>X$ 时，行使看涨期权；当 $S(T)\leqslant X$ 时，结清看跌期权的空头头寸。

根据式（7.3），余额 $(S(0)-C^{E}+P^{E})e^{rT}-X$ 将是正的，也与无套利原则矛盾。

□

练习 7.3

假设股票不支付红利，以每股 15.60 美元交易；在 3 个月以后施权的施权价为 15 美元的看涨期权以 2.83 美元交易。连续复合利率 $r=6.72\%$。计算具有相同的施权价和施权日的看跌期权的价格。

练习 7.4

施权价为 24 美元；6 个月以后施权的欧式看涨期权和看跌期权以 5.09 美元和 7.78 美元交易；标的股票的价格为 20.37 美元；利率为 7.48%，计算套利机会。

152

注 7.1

根据定理 7.1，我们可以得出一个简单但重要的结论：欧式看涨期权和看跌期权的价格以相同的方式依赖于不在看跌期权—看涨期权平价关系式（7.1）中的任意变量。换言之，价差不取决于这些变量。例如，考虑股票的期望收益，如果看涨期权的价格随着期望收益增长，这看起来与直觉一致，因为股票价格越高，意味着看涨期权的回报越高，则看跌期权的价格也应该增长，而后者与通常的理解矛盾，因为股票价格越高，看跌期权的回报越低。因此我们认为，看跌期权和看涨期权的价格与股票的期望收益无关。当在第 8 章中推导出看跌期权和看涨期权的布莱克-斯科尔斯公式（Black-Scholes formula）后，就可以看到情况确实如此。

根据本节开始时的论证，我们可以把看跌期权—看涨期权平价写成如下形式：

$$C^{E}-P^{E}=V_X(0) \tag{7.4}$$

式中，$V_X(0)$ 为远期合约多头的价值，见式（6.10）。注意，如果 X 等于资产的远期的理论价格 $S(0)e^{rT}$，那么远期合约的价值为零，即 $V_X(0)=$

0，于是 $C^E = P^E$。式（7.4）允许我们借助于在注 6.3 建立的关系式推广看跌期权—看涨期权平价，即如果股票在时间 0 和时间 T 之间支付红利，那么 $V_X(0)=S(0)-\mathrm{div}_0-Xe^{-rT}$，这里 div_0 是红利的现值。由此可以得出

$$C^E - P^E = S(0) - \mathrm{div}_0 - Xe^{-rT} \tag{7.5}$$

如果红利是以支付率 r_{div} 连续支付，那么 $V_X(0)=S(0)e^{-r_{\mathrm{div}}T}-Xe^{-rT}$，于是

$$C^E - P^E = S(0)e^{-r_{\mathrm{div}}T} - Xe^{-rT} \tag{7.6}$$

练习 7.5

给出式（7.5）的概要的套利证明。

练习 7.6

给出式（7.6）的概要的套利证明。

练习 7.7

153

利用练习 6.5 的数据，计算 6 个月施权的看涨期权和看跌期权的施权价，使得 $C^E = P^E$。

我们对于美式期权看跌期权—看涨期权平价仅给出一个估计，而不是包括看跌期权和看涨期权价格的严格等式。

定理 7.2（看跌期权—看涨期权平价估计）

具有相同的施权价 X 和相同的施权日 T 不支付红利的美式股票看跌期权和看涨期权的价格满足

$$S(0) - Xe^{-rT} \geqslant C^A - P^A \geqslant S(0) - X$$

证明

假设第一个不等式不成立，即

$$C^A - P^A - S(0) + Xe^{-rT} > 0$$

那么可以卖出 1 份看涨期权，买入 1 份看跌期权和 1 股股票，利用货币市场融资交易。如果美式看涨期权的持有者选择在时间 $t \leqslant T$ 施权，对于股票我们收到 X 和结清货币市场头寸，结束看跌期权并且得到正的金额，即

$$\begin{aligned} X + (C^A - P^A - S(0))e^{rt} &= (Xe^{-rt} + C^A - P^A - S(0))e^{rt} \\ &\geqslant (Xe^{-rT} + C^A - P^A - S(0))e^{rt} > 0 \end{aligned}$$

如果看涨期权没有被执行，我们可以通过在时间 T 施权看跌期权，以价

格 X 卖出股票，我们仍然可以得到正的金额，即

$$X+(C^{A}-P^{A}-S(0))e^{rT}>0$$

现在假设

$$C^{A}-P^{A}-S(0)+X<0$$

在这种情况下，我们可以卖出 1 份看跌期权，买入 1 份看涨期权，并卖空 1 股股票，投资余额于货币市场。如果在时间 $t\leqslant T$ 行使美式看跌期权，那么我们可以从货币市场提取 X 买入 1 股股票结清股票的空头头寸。最后我们将持有看涨期权和一个正的金额，即

$$(-C^{A}+P^{A}+S(0))e^{rt}-X>Xe^{rt}-X\geqslant 0$$

154 如果看跌期权没有执行，那么我们可以在时间 T 执行看涨期权，买入 1 股结清股票的空头头寸。结清货币市场头寸，最后我们得到正的金额，即

$$(-C^{A}+P^{A}+S(0))e^{rT}-X>Xe^{rT}-X>0$$

根据无套利原则，定理成立。 □

练习 7.8

修改定理 7.2 的证明，对于股票在时间 0 和时间 T 之间支付红利的情况，证明

$$S(0)-Xe^{-rT}\geqslant C^{A}-P^{A}\geqslant S(0)-\mathrm{div}_0-X$$

式中，div_0 为红利在时间 0 的折现值。

练习 7.9

修改定理 7.2 的证明，对于以支付率 r_{div} 连续支付红利的情况，证明

$$S(0)-Xe^{-rT}\geqslant C^{A}-P^{A}\geqslant S(0)e^{-r_{\mathrm{div}}T}-X$$

7.3 期权价格的边界

首先，我们注意到，对于具有相同施权价 X 和到期时间 T 的欧式期权和美式期权，显然

$$C^{E}\leqslant C^{A},\quad P^{E}\leqslant P^{A} \tag{7.7}$$

这两个不等式成立，因为美式期权至少给出了与欧式期权同样的权利。

图 7—3 显示的是股票价格状况，在这个状况下，在时间 T 施权，欧式看涨期权的回报是零，而美式期权在股票价格高于 X 时的时间 $t<T$ 执行，回报是正的。然而，没有必要把不等式（7.7）用严格的不等式代替，见 7.3.2 节，在那里我们将对不支付红利资产的看涨期权证明 $C^E=C^A$。

155

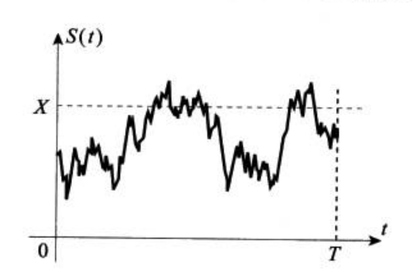


图 7—3　美式期权带来正的回报，而欧式期权没有回报的状况

练习 7.10

利用套利论证证明式（7.7）。

另外，显然看涨期权和看跌期权的价格是非负的，因为这种期权在将来有可能有正的收益但没有义务。因此

$$C^E\geqslant 0,\ P^E\geqslant 0$$

类似地，不等式对于具有更高价值的美式期权成立。实际上，期权的价格几乎总是正的，除非是在一个非常特殊的情况。例如对于施权价 $X=120$ 美元，施权期限为 1 天的看涨期权，当标的股票的交易价格为 100 美元，并且当天的价格变化限制在 $\pm 10\%$ 时，期权的价格 $C^E=0$。

接下来，我们将讨论欧式期权和美式期权价格的更简单的边界。这样的边界的优点是**通用的**（universal），它们不依赖于股票价格的特殊模型，仅由无套利原则就可得出。

7.3.1 欧式期权

我们将建立欧式看涨和看跌期权价格的上界和下界。

一方面，显然

$$C^E<S(0)$$

如果相反的不等式成立，即如果 $C^E\geqslant S(0)$，那么我们将卖出期权并且购买股票，将余额投资于货币市场。在施权日 T，我们将以价格 $\min(S(T),X)$ 卖出股票结清看涨期权。我们的套利利润为 $(C^E-S(0))e^{rT}+\min(S(T),$

$X)>0$。这即可证明 $C^{E}<S(0)$。另一方面，我们有下界

156

$$S(0)-Xe^{-rT}\leqslant C^{E}$$

因为 $P^{E}\geqslant 0$，所以不等式可由看跌期权—看涨期权平价公式直接得出。而且，因为 $C^{E}<S(0)$，由看跌期权—看涨期权平价公式可以得到

$$P^{E}<Xe^{-rT}$$

因为 $C^{E}\geqslant 0$，由看跌期权—看涨期权平价公式可以得出

$$-S(0)+Xe^{-rT}\leqslant P^{E}$$

我们将这些结论归纳为如下命题，并在图 7—4 中画出其边界和相应的期权价格区域。

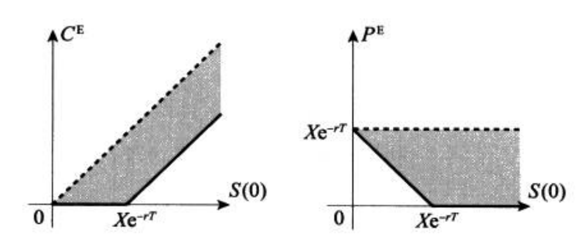


图 7—4　欧式看涨和看跌期权的价格边界

命题 7.3

不支付红利的股票的欧式看涨期权和看跌期权的价格满足不等式

$$\max\{0,\ S(0)-Xe^{-rT}\}\leqslant C^{E}<S(0)$$
$$\max\{0,\ -S(0)+Xe^{-rT}\}\leqslant P^{E}<Xe^{-rT}$$

对于支付红利的股票，其边界为

$$\max\{0,\ S(0)-\mathrm{div}_0-Xe^{-rT}\}\leqslant C^{E}<S(0)-\mathrm{div}_0$$
$$\max\{0,\ -S(0)+\mathrm{div}_0+Xe^{-rT}\}\leqslant P^{E}<Xe^{-rT}$$

练习 7.11

对于支付红利的股票，证明命题 7.3 的期权价格的边界。

练习 7.12

157

对于支付红利的股票，画出由边界确定的价格区域。

7.3.2　不支付红利的股票的欧式看涨期权和美式看涨期权

考虑具有相同施权价 X 和施权日 T 的欧式看涨期权和美式看涨期

权，我们已知 $C^A \geqslant C^E$，因为与欧式期权相比，美式期权给出的权利更多。如果标的股票不支付红利，根据命题 7.3，有 $C^E \geqslant S(0) - Xe^{-rT}$。由此得出，如果 $r>0$，则 $C^A > S(0) - X$。因为在时间 0，美式期权的价格高于回报，所以宁可卖出而不在时间 0 施权。

选择 0 作为发生套利的开始时间是武断的做法。通过用任意给定的 $t<T$ 代替 0，我们将证明美式期权不可能在时间 t 施权，这意味着在到期之前不会被施权，这样它应该等同于欧式期权。特别地，它们的价格应该是相等的，这引出了如下定理。

定理 7.4

当两个期权的施权价 X 和到期时间 T 相同时，不支付红利的股票的欧式看涨期权和美式看涨期权的价格是相等的，即 $C^A = C^E$。

证明

我们已经知道 $C^A \geqslant C^E$，参见式（7.7）和练习 7.10。如果 $C^A > C^E$，则卖出美式看涨期权，买入欧式看涨期权，以利率 r 投资金额 $C^A - C^E$。如果美式看涨期权在时间 $t \leqslant T$ 施权，则借入 1 股股票以价格 X 卖出，结清卖出看涨期权的义务，以利率 r 投资 X。那么在时间 T，可以利用欧式期权以价格 X 买入 1 股股票，结清股票空头头寸。套利利润将为 $(C^A - C^E)e^{rT} + Xe^{r(T-t)} - X > 0$。如果美式期权没有被执行，则结清欧式期权，套利利润为 $(C^A - C^E)e^{rT} > 0$。这证明了 $C^A = C^E$。 □

定理 7.4 乍看起来似乎与直觉矛盾。如果 $S(t) > X$，在时间 $t<T$ 施权，美式看涨期权可以获利 $S(t) - X$，欧式看涨期权不可能在时间 $t<T$ 施权，因此，可能会认为与欧式看涨期权相比，美式看涨期权的价值更高。不过，这并不矛盾。尽管欧式看涨期权不可能在时间 $t<T$ 施权，但它至少可以以不低于 $S(t) - X$ 的价格卖出。

158

对于支付红利的股票，情况有所不同。第 8 章中的例 8.2 给出，在这种情况下，美式看涨期权的价值高于相同条件的欧式看涨期权的价值，并且会在到期日之前被施权，至少在某些状况下如此。

另一方面，经常会发生美式看跌期权提前施权的情况，尽管标的股票不支付红利，见例 7.2。

例 7.2

假设股票的价格为 10 美元；1 年到期的美式看跌期权的施权价为 80 美元；利率为 16%。现在施权，持有者可以得到 70 美元。将 70 美元以 16%利率投资 1 年以后，可以获得 81.20 美元。而看跌期权的价值不可能超过施权价，见式（7.8），于是持有者会决定提前施权。

7.3.3 美式期权

首先我们考虑不支付红利的股票的期权。在这种情况下，美式看涨期权的价格等于欧式看涨期权的价格，即 $C^{A}=C^{E}$，见定理 7.4，于是一定满足与命题 7.3 相同的边界条件。对美式看跌期权，有

$$-S(0)+X\leqslant P^{A}$$

因为 P^{A} 不可能小于期权在时间 0 的回报。这就给出了一个比欧式期权更低的下界，而美式看跌期权的上界与欧式看跌期权相比更宽松，即

$$P^{A}<X \tag{7.8}$$

实际上，如果 $P^{A}\geqslant X$，则存在下面的套利策略：以价格 P^{A} 卖出美式看跌期权，将得到的金额以利率 r 投资。如果在时间 $t\leqslant T$ 施权，那么以价格 X 买入 1 股标的股票，然后以价格 $S(t)$ 卖出，最后的现金余额将是正的，即 $P^{A}e^{rt}-X+S(t)>0$。如果期权一直没施权，最终的现金余额仍然是正的，即 $P^{A}e^{rT}>0$。我们将这些结论概括如下。

159

命题 7.5

不支付红利的股票的美式看涨期权和看跌期权的价格满足如下不等式

$$\max\{0,S(0)-Xe^{-rT}\}\leqslant C^{A}<S(0)$$
$$\max\{0,-S(0)+X\}\leqslant P^{A}<X$$

下面我们考虑支付红利的股票的情形。欧式期权的下界暗含 $S(0)-\mathrm{div}_0-Xe^{-rT}\leqslant C^{E}\leqslant C^{A}$ 和 $-S(0)+\mathrm{div}_0+Xe^{-rT}\leqslant P^{E}\leqslant P^{A}$。但是因为美式期权的价格在任何时间都不能小于它的回报，我们还有 $S(0)-X\leqslant C^{A}$ 和 $X-S(0)\leqslant P^{A}$。而且，对于不支付红利的股票，用同样的方法可以得到上界 $C^{A}<S(0)$，$P^{A}<X$。我们将所有这些不等式总结如下：对于支付红利的股票，

$$\max\{0,S(0)-\mathrm{div}_0-Xe^{-rT},S(0)-X\}\leqslant C^{A}<S(0)$$
$$\max\{0,-S(0)+\mathrm{div}_0+Xe^{-rT},-S(0)+X\}\leqslant P^{A}<X$$

练习 7.13

对于支付红利的股票，用套利论证证明 $C^{A}<S(0)$。

7.4 决定期权价格的变量

期权的价格取决于一些变量，这些变量可能是描述期权的变量——例如施权价 X、到期日 T，描述标的资产的变量——例如 $S(0)$ 和红利支付率 r_{div}，以及与市场有关的变量——例如无风险利率 r，当然还有交易时间 t。

我们将期权价格作为一个变量的函数进行分析，其他变量保持不变。这是有效的简化，因为，一般说来，一个变量的变化会伴随着某些变量或者所有其他变量变化。尽管如此，这种简化的情况会提供有意义的结论。

7.4.1 欧式期权

160

对施权价的依赖性。我们将考虑标的资产相同、施权时间 T 相同，但施权价 X 的值不同的期权。为强调取决于 X，我们将看涨期权和看跌期权的价格分别表示为 $C^{\mathrm{E}}(X)$ 和 $P^{\mathrm{E}}(X)$。其余变量，如到期日 T、交易时间 t 和标的资产价格 $S(0)$ 暂时保持不变。

命题 7.6

如果 $X'<X''$，则

$$C^{\mathrm{E}}(X')\geqslant C^{\mathrm{E}}(X'')$$
$$P^{\mathrm{E}}(X')\leqslant P^{\mathrm{E}}(X'')$$

这意味着，$C^{\mathrm{E}}(X)$ 为 X 的非增函数；$P^{\mathrm{E}}(X)$ 为 X 的非减函数。

这些不等式是明显成立的。与较高价格的买权相比，较低价格的买权更有价值。类似地，与以较低的价格卖出资产相比，以较高的价格卖出资产更好。

练习 7.14

给出命题 7.6 中的不等式的严格的套利证明。

命题 7.7

如果 $X'<X''$，则

$$C^{\mathrm{E}}(X')-C^{\mathrm{E}}(X'')\leqslant \mathrm{e}^{-rT}(X''-X')$$
$$P^{\mathrm{E}}(X'')-P^{\mathrm{E}}(X')\leqslant \mathrm{e}^{-rT}(X''-X')$$

证明

由看跌期权—看涨期权平价公式（7.1），有

$$C^{\mathrm{E}}(X')-P^{\mathrm{E}}(X')=S(0)-X'\mathrm{e}^{-rT}$$
$$C^{\mathrm{E}}(X'')-P^{\mathrm{E}}(X'')=S(0)-X''\mathrm{e}^{-rT}$$

161 两式相减，我们可以得到

$$(C^{\mathrm{E}}(X')-C^{\mathrm{E}}(X''))+(P^{\mathrm{E}}(X'')-P^{\mathrm{E}}(X'))=(X''-X')\mathrm{e}^{-rT}$$

因为根据命题 7.6，左边两项是非负的，其中的任何一项都不可能超过右边。

□

注 7.2

不等式的数学意义是看涨期权和看跌期权的价格作为施权价的函数，满足具有常数 $\mathrm{e}^{-rT}<1$ 的利普希茨条件（Lipschitz condition），即

$$|C^{\mathrm{E}}(X'')-C^{\mathrm{E}}(X')|\leqslant \mathrm{e}^{-rT}|X''-X'|$$
$$|P^{\mathrm{E}}(X'')-P^{\mathrm{E}}(X')|\leqslant \mathrm{e}^{-rT}|X''-X'|$$

特别地，期权价格作为施权价的函数图形的斜率小于 45°。对于看涨期权，如图 7—5 所示。

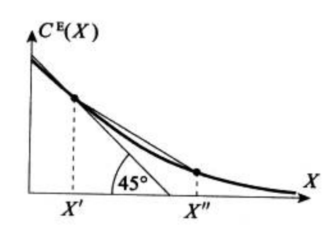


图 7—5 看涨期权价格 $C^{\mathrm{E}}(X)$ 的利普希茨性质

命题 7.8

假设 $X'<X''$，$\alpha\in(0,1)$，则

$$C^{\mathrm{E}}(\alpha X'+(1-\alpha)X'')\leqslant \alpha C^{\mathrm{E}}(X')+(1-\alpha)C^{\mathrm{E}}(X'')$$
$$P^{\mathrm{E}}(\alpha X'+(1-\alpha)X'')\leqslant \alpha P^{\mathrm{E}}(X')+(1-\alpha)P^{\mathrm{E}}(X'')$$

换言之，$C^{\mathrm{E}}(X)$ 和 $P^{\mathrm{E}}(X)$ 为 X 的凸函数。

证明

为简单起见，我们令 $X=\alpha X'+(1-\alpha)X''$。假设

$$C^{\mathrm{E}}(X)>\alpha C^{\mathrm{E}}(X')+(1-\alpha)C^{\mathrm{E}}(X'')$$

162 我们卖出 1 份施权价为 X 的期权，买入 α 份施权价为 X' 的期权和 $(1-\alpha)$ 份施权价为 X'' 的期权，将余额 $C^{E}(X)-(\alpha C^{E}(X')+(1-\alpha)C^{E}(X''))>0$ 进行无风险投资。在到期日，如果以施权价 X 执行期权，我们得到回报 $(S(T)-X)^{+}$。执行 α 份施权价为 X' 的看涨期权和 $(1-\alpha)$ 份施权价为 X'' 的看涨期权，我们将得到金额 $\alpha(S(T)-X')^{+}+(1-\alpha)(S(T)-X'')^{+}$。由如下的不等式我们可以得到套利利润（详细证明留给读者，见练习 7.15）：

$$(S(T)-X)^{+}\leqslant\alpha(S(T)-X')^{+}+(1-\alpha)(S(T)-X'')^{+} \quad (7.9)$$

看跌期权的凸性可利用看跌期权—看涨期权平价公式（7.1）得出。另外，对于看涨期权，用类似思路可以给出套利论证。 □

练习 7.15

证明不等式（7.9）。

注 7.3

根据命题 7.8，$C^{E}(X)$ 和 $P^{E}(X)$ 为 X 的凸函数。在几何意义上，这意味着，如果通过函数图形上的两点连接直线，两点之间的函数图形位于直线的下方。对于看涨期权，如图 7—6 所示。

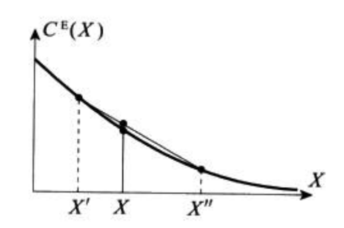


图 7—6 看涨期权价格 $C^{E}(X)$ 的凸性

对标的资产价格的依赖性。标的资产的当前价格 $S(0)$ 由市场决定，它不可能改变，而我们可以考虑由价值为 $S=xS(0)$ 的 x 股股票构成的资产组合的期权。施权价为 X，在时间 T 被施权的资产组合的看涨期权的回报为 $(xS(T)-X)^{+}$；看跌期权的回报为 $(X-xS(T))^{+}$。我们将研究期权价格对 S 的依赖性，假设其余变量是固定的。我们将用 $C^{E}(S)$ 和 $P^{E}(S)$ 表示看涨期权和看跌期权的价格。

注 7.4

163 尽管股票资产组合期权的实际意义很小，但是函数 $C^{E}(S)$ 和 $P^{E}(S)$ 是重要的，因为它们可以反映在其他变量几乎不变的情形下，标的资产价格的突然变化对期权价格的影响。

命题 7.9

如果 $S'<S''$，那么

$$C^{\mathrm{E}}(S')\leqslant C^{\mathrm{E}}(S'')$$
$$P^{\mathrm{E}}(S')\geqslant P^{\mathrm{E}}(S'')$$

即 $C^{\mathrm{E}}(S)$ 为 S 的非减函数；$P^{\mathrm{E}}(S)$ 为 S 的非增函数。

证明

对某个 $S'<S''$，假设 $C^{\mathrm{E}}(S')>C^{\mathrm{E}}(S'')$，其中 $S'=x'S(0)$，$S''=x''S(0)$。我们可以卖出 x'份股份构成的资产组合的看涨期权，买入 x''份股份构成的资产组合的看涨期权，这两个期权具有相同的施权价 X 和施权时间 T，我们将余额 $C^{\mathrm{E}}(S')-C^{\mathrm{E}}(S'')$ 进行无风险投资。因为 $x'<x''$，回报满足 $(x'S(T)-X)^{+}\leqslant(x''S(T)-X)^{+}$。如果卖出的期权在时间 T 施权，我们可以行使另一个的期权履行义务并将得到套利利润。

利用类似的套利论证可以得出看跌期权的不等式。 □

练习 7.16

证明命题 7.9 中对于看跌期权的不等式。

命题 7.10

假设 $S'<S''$，则

$$C^{\mathrm{E}}(S'')-C^{\mathrm{E}}(S')\leqslant S''-S'$$
$$P^{\mathrm{E}}(S')-P^{\mathrm{E}}(S'')\leqslant S''-S'$$

164

证明

我们利用看跌期权—看涨期权平价公式 (7.1)

$$C^{\mathrm{E}}(S'')-P^{\mathrm{E}}(S'')=S''-X\mathrm{e}^{-rT}$$
$$C^{\mathrm{E}}(S')-P^{\mathrm{E}}(S')=S'-X\mathrm{e}^{-rT}$$

两式相减，得到

$$(C^{\mathrm{E}}(S'')-C^{\mathrm{E}}(S'))+(P^{\mathrm{E}}(S')-P^{\mathrm{E}}(S''))=S''-S'$$

根据命题 7.9，左边的两项都是非负的，于是它们之中的任意一项都不超过右边。 □

注 7.5

根据命题 7.10，连接作为 S 的函数的看涨期权或看跌期权价格曲线上的两点，直线的斜率小于 45°。对于看涨期权，如图 7—7 所示。换言之，看涨期权和看跌期权的价格 $C^{\mathrm{E}}(S)$ 和 $P^{\mathrm{E}}(S)$ 满足具有常数 1 的利

普希茨条件，

$$|C^{E}(S'')-C^{E}(S')|\leqslant|S''-S'|$$
$$|P^{E}(S'')-P^{E}(S')|\leqslant|S''-S'|$$

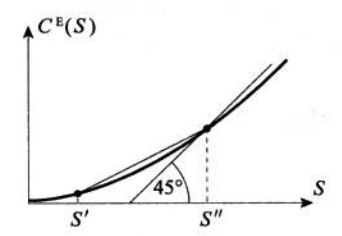


图 7—7　看涨期权价格 $C^{E}(S)$ 的利普希茨性质

命题 7.11

假设 $S'<S''$，$\alpha\in(0,1)$，则

$$C^{E}(\alpha S'+(1-\alpha)S'')\leqslant\alpha C^{E}(S')+(1-\alpha)C^{E}(S'')$$
$$P^{E}(\alpha S'+(1-\alpha)S'')\leqslant\alpha P^{E}(S')+(1-\alpha)P^{E}(S'')$$

这意味着，看涨期权和看跌期权的价格为 S 的凸函数。

165

证明

为简单起见，令 $S=\alpha S'+(1-\alpha)S''$。假设 $S'=x'S(0)$，$S''=x''S(0)$，$S=xS(0)$，于是 $x=\alpha x'+(1-\alpha)x''$。假设

$$C^{E}(S)>\alpha C^{E}(S')+(1-\alpha)C^{E}(S'')$$

我们卖出 x 股构成的资产组合的看涨期权，买入 α 份 x' 股构成的资产组合的看涨期权和（$1-\alpha$）份 x'' 股构成的资产组合的看涨期权，将余额 $C^{E}(S)-\alpha C^{E}(S')-(1-\alpha)C^{E}(S'')$ 进行无风险投资。如果卖出的期权在时间 T 施权，那么，我们必须支付 $(xS(T)-X)^{+}$。为履行这个义务，我们会将其他期权施权。因为

$$(xS(T)-X)^{+}\leqslant\alpha(x'S(T)-X)^{+}+(1-\alpha)(x''S(T)-X)^{+}$$

这是一个套利策略。

类似地，利用套利论证或者看跌期权—看涨期权平价可以证明看跌期权的不等式。 □

7.4.2 美式期权

一般说来，美式期权与其相应的欧式期权的性质类似。困难之一是，看跌期权—看涨期权平价不成立。我们仅有定理 7.2 较弱的估计。另外，

我们必须考虑提前执行的可能性。

对施权价的依赖性。我们用 $C^{A}(X)$ 和 $P^{A}(X)$ 表示看涨期权和看跌期权的价格，是为了强调依赖于 X，其他变量是固定的。

依据与欧式期权同样的理由，如下的命题是明显成立的。较高的施权价对于买权来说价值较小，对于卖权来说价值较大。

命题 7.12

如果 $X'<X''$，则

$$C^{A}(X')\geqslant C^{A}(X'')$$
$$P^{A}(X')\leqslant P^{A}(X'')$$

练习 7.17

给出命题 7.12 的严格的套利证明。

命题 7.13

166

假设 $X'<X''$，则

$$C^{A}(X')-C^{A}(X'')\leqslant X''-X'$$
$$P^{A}(X'')-P^{A}(X')\leqslant X''-X'$$

证明

假设 $X'<X''$，但 $C^{A}(X')-C^{A}(X'')>X''-X'$。我们卖出施权价为 X'的看涨期权，买入施权价为 X''的看涨期权，将余额 $C^{A}(X')-C^{A}(X'')$ 进行无风险投资。如果卖出的期权在时间 $t\leqslant T$ 施权，我们将支付 $(S(t)-X')^{+}$。另外的期权立刻行权，我们得到 $(S(t)-X'')^{+}$。注意

$$(S(t)-X'')^{+}-(S(t)-X')^{+}\geqslant-(X''-X')$$

加上无风险投资总量大于 $X''-X'$，我们就可以得到正的金额，这实际上就是套利利润。

看跌期权的证明类似。

□

定理 7.14

假设 $X'<X''$，令 $\alpha\in(0,1)$，则

$$C^{A}(\alpha X'+(1-\alpha)X'')\leqslant\alpha C^{A}(X')+(1-\alpha)C^{A}(X'')$$
$$P^{A}(\alpha X'+(1-\alpha)X'')\leqslant\alpha P^{E}(X')+(1-\alpha)P^{A}(X'')$$

证明

为简单起见，我们令 $X=\alpha X'+(1-\alpha)X''$。假设

$$C^{A}(X)>\alpha C^{A}(X')+(1-\alpha)C^{A}(X'')$$

我们卖出 1 份施权价为 X 的期权，买入 α 份施权价为 X'的期权和 $(1-\alpha)$ 份施权价为 X''的期权，将余额进行无风险投资。如果卖出的期权被施权，则我们将持有的两个期权施权；如果卖出的期权一直没被施权，我们不必做任何事情。按这种方法，我们将实现套利，因为

$$(S(t)-X)^+ \leqslant \alpha(S(t)-X')^+ + (1-\alpha)(S(t)-X'')^+$$

看跌期权的证明类似。 □

167

对标的资产价格的依赖性。首先，我们考虑 x 股的资产组合的期权。这个资产组合的美式看涨期权和看跌期权的价格用 $C^A(S)$ 和 $P^A(S)$ 表示，其中 $S=xS(0)$ 为资产组合的价值，其余的变量保持不变。在时间 t，对看涨期权的回报为 $(xS(t)-X)^+$；对看跌期权的回报为 $(X-xS(t))^+$。

命题 7.15

如果 $S'<S''$，则

$$C^A(S')\leqslant C^A(S'')$$
$$P^A(S')\geqslant P^A(S'')$$

证明

假设对某个 $S'<S''$，有 $C^A(S')>C^A(S'')$，其中 $S'=x'S(0)$，$S''=x''S(0)$。我们可以卖出 x'股资产组合的看涨期权，买入 x''股资产组合的看涨期权，这两个期权的施权价 X 和到期日 T 相同。将这些交易的余额 $C^A(S')-C^A(S'')$进行无风险投资。如果卖出的期权在时间 $t\leqslant T$ 被施权，则我们可以将另一个期权立刻施权履行义务。因为 $x'<x''$，回报满足 $(x'S(t)-X)^+\leqslant(x''S(t)-X)^+$。因此，这个策略提供了一个套利机会。

看跌期权的证明类似。 □

命题 7.16

假设 $S'<S''$，则

$$C^A(S'')-C^A(S')\leqslant S''-S'$$
$$P^A(S')-P^A(S'')\leqslant S''-S'$$

证明

看涨期权的不等式可由定理 7.4 和命题 7.10 得出。

对于看跌期权，假设 $P^A(S')-P^A(S'')>S''-S'$对某个 $S'<S''$成立，其中 $S'=x'S(0)$，$S''=x''S(0)$。我们买入 $x''-x'>0$ 股股票，买入 x''股资产组合的看跌期权，并卖出 x'股资产组合的看跌期权，这两个期权的施权价 X 和到期日 T 相同。这些交易的余额 $-(S''-S')-P^A(S'')+P^A(S')>0$。如果 x'股看跌期权的持有者选择在时间 $t\leqslant T$ 施权，我们将

168 支付 $(X-x'S(t))^+$。利用卖出 $x''-x'$ 股股票和在时间 t 施权 x'' 股资产组合的期权，我们的所得足以履行这个义务：

$$(x''-x')S(t)+(X-x''S(t))^+\geqslant(X-x'S(t))^+$$

这是因为 $x''\geqslant x'$。如果 x' 股资产组合的看跌期权一直没有施权，我们不必采取任何行动。在任何情况下，原来的利润及利息归我们所有，产生一个套利机会。

□

命题 7.17

假设 $S'<S''$，令 $\alpha\in(0,1)$，则

$$C^{\mathrm{A}}(\alpha S'+(1-\alpha)S'')\leqslant\alpha C^{\mathrm{A}}(S')+(1-\alpha)C^{\mathrm{A}}(S'')$$
$$P^{\mathrm{A}}(\alpha S'+(1-\alpha)S'')\leqslant\alpha P^{\mathrm{A}}(S')+(1-\alpha)P^{\mathrm{A}}(S'')$$

证明

令 $S=\alpha S'+(1-\alpha)S''$，$S'=x'S(0)$，$S''=x''S(0)$，$S=xS(0)$。假设

$$C^{\mathrm{A}}(S)>\alpha C^{\mathrm{A}}(S')+(1-\alpha)C^{\mathrm{A}}(S'')$$

我们可以卖出 x 股股票资产组合的看涨期权，买入 x' 股资产组合的看涨期权和 x'' 股资产组合的看涨期权，所有这些期权具有相同的施权价 X 和到期日 T。将这些交易的余额 $C^{\mathrm{A}}(S)-\alpha C^{\mathrm{A}}(S')-(1-\alpha)C^{\mathrm{A}}(S'')$ 投资于无风险资产。如果卖出的期权在时间 $t\leqslant T$ 施权，我们必须支付 $(xS(t)-X)^+$，其中 $x=\alpha x'+(1-\alpha)x''$，我们可以将其他两个期权施权，履行这个义务。这是一个套利策略，因为

$$(xS(t)-X)^+\leqslant\alpha(x'S(t)-X)^++(1-\alpha)(x''S(t)-X)^+$$

看跌期权的证明类似。

□

对到期时间的依赖性。对于美式期权，我们也可以建立期权价格对到期时间 T 依赖性的一般公式。为强调对时间 T 的依赖性，我们把美式看涨期权和看跌期权的价格写为 $C^{\mathrm{A}}(T)$ 和 $P^{\mathrm{A}}(T)$，假设其他变量是固定的。

命题 7.18

如果 $T'<T''$，则

$$C^{\mathrm{A}}(T')\leqslant C^{\mathrm{A}}(T'')$$
$$P^{\mathrm{A}}(T')\leqslant P^{\mathrm{A}}(T'')$$

169 **证明**

假设 $C^{\mathrm{A}}(T')>C^{\mathrm{A}}(T'')$，我们卖出在时间 T' 到期的期权，买入具有相同施权价的在时间 T'' 到期的期权，将余额投资于无风险资产。如果卖

出的期权在时间 $t \leqslant T'$ 被施权，我们可以立即施权其他期权履行义务。投资于无风险资产的正的余额 $C^{A}(T')-C^{A}(T'')>0$ 为套利利润。

看跌期权的证明类似。 □

7.5 期权的时间价值

我们经常使用如下的方便的术语。我们说在时间 t 施权价为 X 的看涨期权是

- 币内的，如果 $S(t)>X$；
- 币上的，如果 $S(t)=X$；
- 币外的，如果 $S(t)<X$。

类似地，对于看跌期权，我们说它是

- 币内的，如果 $S(t)<X$，
- 币上的，如果 $S(t)=X$，
- 币外的，如果 $S(t)>X$。

尽管不太精确，但使用术语**极币内**（deep in the money）和**极币外**（deep out the money）还是很方便的，这意味着不等式两边的差是相当大的。

美式币内期权如果施权可以立即得到正的回报，而美式币外期权则不一定。我们对于欧式期权采用相同的术语，尽管它们的含义不同：即使期权在当前是币内的，在施权日，回报可能会变为零。与盈利性资产相比，欧式币内期权的回报不一定更多。

定义 7.1

在时间 $t \leqslant T$，施权价为 X 的期权的内在价值为 $(S(t)-X)^{+}$；施权价相同的看跌期权的内在价值为 $(X-S(t))^{+}$。

我们可以看出，币外期权和币上期权的内在价值为零；币内期权的内在价值是正的；在到期日 T，期权的价格与其内在价值一致。由于有将来获利的可能性，美式期权在到期日之前的价格可以大于其内在价值；欧式期权在它施权之前的价格可以大于或者小于其内在价值。

170

定义 7.2

期权的**时间价值**是期权价值和内在价值之差，即

$C^{E}(t)-(S(t)-X)^{+}$，对于欧式看涨期权

$P^{E}(t)-(X-S(t))^{+}$，对于欧式看跌期权

$C^{A}(t)-(S(t)-X)^{+}$，对于美式看涨期权

$P^{A}(t)-(X-S(t))^{+}$，对于美式看跌期权

例 7.3

我们研究某些有代表性的数据。假设股票当前价格为每股 125.23 美元，考虑如下情况：

施权价	内在价值		时间价值		期权价格	
	看涨期权	看跌期权	看涨期权	看跌期权	看涨期权	看跌期权
110	15.23	0.00	3.17	2.84	18.40	2.84
120	5.23	0.00	7.04	6.46	12.27	6.46
130	0.00	5.23	6.78	4.41	6.78	9.64

施权价为 110 美元的美式看涨期权是币内的，其内在价值为 15.23 美元。一般说来，因为期权可能立即执行，所以期权的价值至少等于内在价值。由于有将来获利的可能性，所以看涨期权的价格大于其内在价值。另一方面，施权价为 110 美元的看跌期权是币外的，其内在价值为零。由于有将来获利的可能性，所以看跌期权的价格全部是正的。其他施权价的类似的关系也可以在表中看出。

作为 S 的函数的欧式看涨期权的时间价值如图 7—8 所示。它永远不可能是负的，并且对于 S 的相当大的值，它大于 $X-Xe^{-rT}$，这是可以由不等式 $C^{E}(S)\geqslant S-Xe^{-rT}$ 得出，见命题 7.3。


171

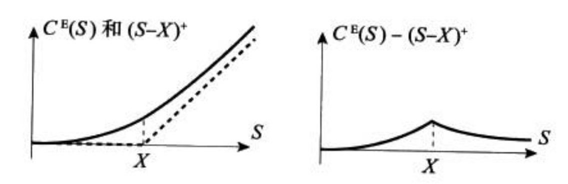


图 7—8 欧式看涨期权的时间价值 $C^{E}(S)-(S-X)^{+}$

欧式看跌期权的市场价值可以小于其内在价值，即时间价值可以是负的，如图 7—9 所示。只有看跌期权是币内的，即 $S<X$（并且是极币内的），才可能是这种情形。

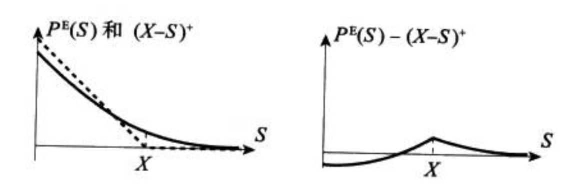


图 7—9 欧式看跌期权的时间价值 $P^{E}(S)-(X-S)^{+}$

因为欧式期权必须到到期日 T 才能实现回报，在此期间，股票上涨超过 X 的风险是应当考虑的，这会减少期权的价值。

美式看涨期权的时间价值与欧式看涨期权的时间价值相同（如果不支付红利），可以参见图 7—8。美式看跌期权的时间价值如图 7—10 所示。

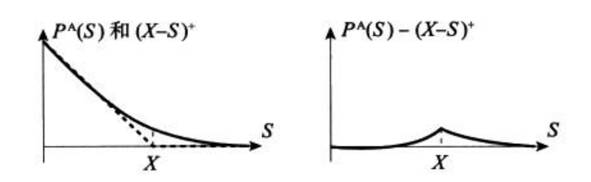


图 7—10　美式看跌期权的时间价值 $C^A(S)-(S-X)^+$

图 7—8、图 7—9 和图 7—10 还表明了如下结论。

命题 7.19

对于任意的、施权价为 X 的欧式或者美式看涨期权或者看跌期权，在 $S=X$ 时，时间价值达到最大值。

证明

我们现在论证欧式看涨期权的情况。当 $S\leqslant X$ 时，期权的内在价值为零。因为根据命题 7.9，$C^E(S)$ 为 S 的增函数，这意味着当 $S\leqslant X$ 时，时间价值为 S 的增函数。另一方面，根据命题 7.10，对于任意的 $S'<S''$，$C^E(S'')-C^E(S')\leqslant S''-S'$。由此得出如果 $X\leqslant S'<S''$，$C^E(S'')-(S''-X)^+\leqslant C^E(S')-(S'-X)^+$，这意味着当 $S\geqslant X$ 时，时间价值为 S 的减函数。因此时间价值在 $S=X$ 达到最大值。

172

其他期权的证明类似。 □

练习 7.18

对于看跌期权，证明命题 7.19。

第 8 章 期权定价

173 对于以股票 S 为标的资产的**欧式衍生证券**或者**未定权益**，我们指定一个形式为 $D(T)=f(S(T))$ 的随机变量，其中 f 为给定的函数，称为**回报函数**。回报函数是欧式看涨期权的 $f(S)=(S-X)^+$ 和看跌期权的 $f(S)=(X-S)^+$ 或远期合约的 $f(S)=S-X$（对多头头寸）直接的推广。

基于复制期权的回报，我们已经论述了单期期权定价的基本方法（见 1.6 节）。毫不奇怪，这个思想可以扩展到建立在单期二状态树块基础上的一般的二叉树模型。在本章中，我们的主要任务是进行这个扩展。

定理 8.1

假设对任意未定权益 $D(T)$ 存在一个复制策略，即存在一个可允许的策略 $x(t)$，$y(t)$，其价值 $V(T)=D(T)$，那么未定权益在时间 0 的价值一定等于复制策略在时间 0 的价值，即 $V(0)=D(0)$。

证明

定理的证明只是命题 1.3 证明的修改。如果 $D(0)>V(0)$，则我们卖出衍生证券并取得策略的多头头寸，承担的义务可以由该策略履行。差174 额 $D(0)-V(0)$ 可以给我们带来套利利润；如果 $D(0)<V(0)$，我们进行相反的操作，$V(0)-D(0)$ 将产生套利利润。 □

复制还解决了期权卖出者套期保值头寸问题，即如果将来自期权的

现金投资于复制策略，那么卖出期权的风险将被化解。

在本章中，我们将进一步发展期权的这种定价方法，我们从对单期二叉树模型的综合分析开始，然后扩展到多期模型。最后介绍连续时间的布莱克-斯科尔斯公式。

8.1 二叉树模型中的欧式期权

8.1.1 单期

这个简单的情况我们在第 1 章已经讨论过，在本节中，我们在更一般的意义上重复这个思想。我们将对一般的衍生证券定价，而不仅仅局限于看涨期权或看跌期权，这样就能扩展这个方法到多期模型。

我们假设在时间 1 随机的股票价格 $S(1)$ 取两个值，表示如下：

$$\begin{cases} S^{u}=S(0)(1+u) \\ S^{d}=S(0)(1+d) \end{cases}$$

其概率分别为 p 和 $1-p$。为复制回报为 f 的一般的衍生证券，我们需要对 $x(1)$，$y(1)$ 求解方程组

$$\begin{cases} x(1)S^{u}+y(1)(1+r)=f(S^{u}) \\ x(1)S^{d}+y(1)(1+r)=f(S^{d}) \end{cases}$$

于是有

$$x(1)=\frac{f(S^{u})-f(S^{d})}{S^{u}-S^{d}}$$

是股票的复制头寸，称为期权的 δ(德尔塔，delta)。我们还可求出货币市场头寸，即

$$y(1)=-\frac{(1+d)f(S^{u})-(1+u)f(S^{d})}{(u-d)(1+r)}$$

175 该复制资产组合的初始价值为 $x(1)S(0)+y(1)$，根据定理 8.1，有

$$\begin{aligned} D(0)&=x(1)S(0)+y(1) \\ &=\frac{f(S^{u})-f(S^{d})}{u-d}-\frac{(1+d)f(S^{u})-(1+u)f(S^{d})}{(u-d)(1+r)} \end{aligned} \tag{8.1}$$

练习 8.1

其他变量不变，证明看涨期权的价格随 u 增长。分析 d 的变化

对期权价格的影响。

练习 8.2

如果 $r=0$，$S(0)=X=1$ 美元，表示出看涨期权价格 $C^{E}(0)$ 的公式。计算 $u=0.05$，$d=-0.05$ 以及 $u=0.01$，$d=-0.19$ 时的价格，得出关于股票收益的方差与期权之间关系的结论。

回想由

$$p_{*}=\frac{r-d}{u-d} \tag{8.2}$$

给出的风险中性概率概念，即风险中性概率会把股票价格折现过程 $(1+r)^{-n}S(n)$ 转变为鞅，见第 3 章。

定理 8.2

折现回报对风险中性概率的期望等于未定权益的现值，即

$$D(0)=E_{*}((1+r)^{-1}f(S(1))) \tag{8.3}$$

176

证明

这是式 (8.1) 的直接结果，即

$$\begin{aligned}D(0)&=\frac{f(S^{u})-f(S^{d})}{u-d}+\frac{(1+u)f(S^{d})-(1+d)f(S^{u})}{(u-d)(1+r)}\\&=\frac{1}{1+r}\left(\frac{(r-d)f(S^{u})}{u-d}+\frac{(u-r)f(S^{d})}{u-d}\right)\\&=\frac{1}{1+r}(p_{*}f(S^{u})+(1-p_{*})f(S^{d}))\\&=E_{*}((1+r)^{-1}f(S(1)))\end{aligned}$$

证毕。

□

练习 8.3

如果标的股票卖出需要支付一定比例的交易成本（买入股票没有交易成本），计算复制看涨期权的资产组合的初始值，并与没有成本的情况进行比较。假设 $S(0)=X=100$ 美元，$u=0.1$，$d=-0.1$，$r=0.05$，设定交易成本 $c=2\%$（卖者得到股票价值的 98%）。

练习 8.4

假设 $S(0)=75$ 美元，$u=0.2$，$d=-0.1$。假设你能以 12%的

利率借款，存款利率是较低的 8%。对看涨期权和看跌期权计算复制资产组合的价值，并回答是否与定理 8.2 得出的看涨期权和看跌期权的价值一致。

8.1.2 两期模型

我们从两期开始，股票价格 $S(2)$ 有三个可能值，

$$S^{uu}=S(0)(1+u)^2,\ S^{ud}=S(0)(1+u)(1+d)$$
$$S^{dd}=S(0)(1+d)^2$$

而 $S(1)$ 有两个可能值，

$$S^{u}=S(0)(1+u),\ S^{d}=S(0)(1+d)$$

在图 8—1 的节点分别用字母 u 和 d 标注。

177

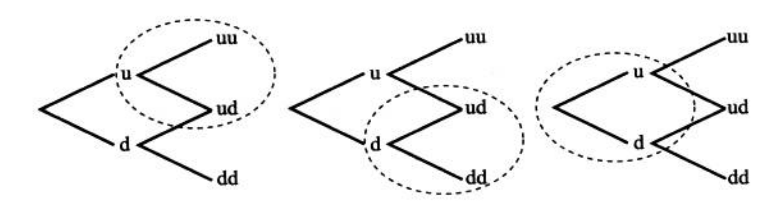


图 8—1　两期二叉树模型的分支

对图 8—1 中的每一个子树，我们可以利用我们描述的复制方法。在时间 2，衍生证券可以被它的回报复制，即

$$D(2)=f(S(2))$$

有三个可能值。衍生证券的价格 $D(1)$ 有两个值，即

$$\frac{1}{1+r}[p_* f(S^{uu})+(1-p_*)f(S^{ud})]$$
$$\frac{1}{1+r}[p_* f(S^{du})+(1-p_*)f(S^{dd})]$$

这是将单期的方法应用于节点为 u 和 d 的两个子树得出的，上述两个式子给出

$$D(1)=\frac{1}{1+r}[p_* f(S(1)(1+u))+(1-p_*)f(S(1)(1+d))]$$
$$=g(S(1))$$

其中，

$$g(x)=\frac{1}{1+r}[p_* f(x(1+u))+(1-p_*)f(x(1+d))]$$

因此，可将 $D(1)$ 表示为在时间 1 施权的回报为 g 的衍生证券（尽管它可能不施权，衍生证券可以以 $D(1)=g(S(1))$ 卖出）。这意味着可把单期方法再一次应用于根部的单个子树。因此，有

$$D(0)=\frac{1}{1+r}[p_* g(S(0)(1+u))+(1-p_*)g(S(0)(1+d))]$$

由此得出

$$\begin{aligned}D(0)&=\frac{1}{1+r}[p_* g(S^u)+(1-p_*)g(S^d)]\\&=\frac{1}{(1+r)^2}[p_*^2 f(S^{uu})+2p_*(1-p_*)f(S^{ud})\\&\quad+(1-p_*)^2 f(S^{dd})]\end{aligned}$$

最后在方括号中的表达式是 $f(S(2))$ 的风险中性期望，这样就证明了如下结论。

定理 8.3

178

对风险中性概率计算的折现回报的期望值等于衍生证券的现值，即

$$D(0)=E_*((1+r)^{-2}f(S(2)))$$

练习 8.5

假设 $S(0)=120$ 美元，$u=0.2$，$d=-0.1$，$r=0.1$。考虑施权价为 $X=120$ 美元，施权时间 $T=2$ 的看涨期权，计算期权价格和复制策略。

练习 8.6

利用练习 8.5 的数据，如果在时间 1 支付 15 美元红利，计算看涨期权的价格和复制策略。

8.1.3 一般的 N 期模型

上面的结论可以直接扩展到多期模型。从末期开始，我们往回重复地求解单期问题，这是 3 期模型的求解方法：

$$D(3)=f(S(3))$$

$$D(2)=\frac{1}{1+r}[p_* f(S(2)(1+u))+(1-p_*)f(S(2)(1+d))]$$

$$
\begin{aligned}
&= g(S(2)) \\
D(1) &= \frac{1}{1+r}[p_* g(S(1)(1+u)) + (1-p_*) g(S(1)(1+d))] \\
&= h(S(1)) \\
D(0) &= \frac{1}{1+r}[p_* h(S(0)(1+u)) + (1-p_*) h(S(0)(1+d))]
\end{aligned}
$$

其中，

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{1+r}[p_* f(x(1+u)) + (1-p_*) f(x(1+d))] \\
h(x) &= \frac{1}{1+r}[p_* g(x(1+u)) + (1-p_*) g(x(1+d))]
\end{aligned}
$$

179 由此得出

$$
\begin{aligned}
D(0) &= \frac{1}{1+r}[p_* h(S^{u}) + (1-p_*) h(S^{d})] \\
&= \frac{1}{(1+r)^2}[p_*^2 g(S^{uu}) + 2p_*(1-p_*) g(S^{ud}) \\
&\quad + (1-p_*)^2 g(S^{dd})] \\
&= \frac{1}{(1+r)^3}[p_*^3 f(S^{uuu}) + 3p_*^2(1-p_*) f(S^{uud}) \\
&\quad + 3p_*(1-p_*)^2 f(S^{udd}) + (1-p_*)^3 f(S^{ddd})]
\end{aligned}
$$

这个公式的模式是这样的：方括号的每一项由股票上涨的次数 k 刻画。这个数确定了 p_* 的幂次和回报值的选择，$1-p_*$ 的幂次是下跌的次数，在上述最后的式子中等于 $3-k$，一般的是等于 $N-k$，其中 N 为期数。每一项前面的系数是通到相应的回报的状况数（通过树的路径数），等于 $\binom{N}{k}=\frac{N!}{k!(N-k)!}$，即 N 个元素选出 k 个元素的组合数。例如，3 期树（3-step tree）通到节点 udd 有三条路径。

因此，在 N 期模型中，

$$
\begin{aligned}
D(0) = \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p_*^k (1-p_*)^{N-k} \\
f(S(0)(1+u)^k(1+d)^{N-k})
\end{aligned}
\tag{8.4}
$$

在风险中性概率之下，$f(S(N))$ 的期望值可由式（8.4）计算出，这个结果可以概括为如下定理。

定理 8.4

在 N 期二叉树模型中，具有回报 $f(S(N))$ 的欧式衍生证券价值是折现回报在风险中性概率之下的期望值，即

$$
D(0) = E_*((1+r)^{-N} f(S(N)))
$$

注 8.1

计算 $D(0)$不需要知道实际的概率 p。期权价格的这个引人注目的性质在实践中是重要的，因为从市场数据中估计 p 值是困难的。$D(0)$ 的公式显示了风险中性概率 p_* 的特性，风险中性概率 p_* 和 p 不同，它可以从式（8.2）很容易地算出。

8.1.4 考克斯-罗斯-鲁宾斯坦公式

180 当 $x \leqslant X$ 时，对于施权价为 X 的看涨期权的回报满足 $f(x)=0$，这将减少式（8.4）中的项数。公式求和可以从使得

$$S(0)(1+u)^m(1+d)^{N-m}>X$$

的项开始，因此有

$$C^{\mathrm{E}}(0)=(1+r)^{-N}\sum_{k=m}^{N}\binom{N}{k}p_*^k(1-p_*)^{N-k}$$
$$(S(0)(1+u)^k(1+d)^{N-k}-X)$$

可以写为

$$C^{\mathrm{E}}(0)=x(1)S(0)+y(1)$$

期权的价格与复制它的资产组合的初始价值有关，这里

$$x(1)=(1+r)^{-N}\sum_{k=m}^{N}\binom{N}{k}p_*^k(1-p_*)^{N-k}(1+u)^k(1+d)^{N-k}$$

$$y(1)=-X(1+r)^{-N}\sum_{k=m}^{N}\binom{N}{k}p_*^k(1-p_*)^{N-k}$$

$x(1)$ 的表达式可以写为

$$\begin{aligned}x(1)&=\sum_{k=m}^{N}\binom{N}{k}\left(p_*\frac{1+u}{1+r}\right)^k\left((1-p_*)\frac{1+d}{1+r}\right)^{N-k}\\&=\sum_{k=m}^{N}\binom{N}{k}q^k(1-q)^{N-k}\end{aligned}$$

其中，

$$q=p_*\frac{1+u}{1+r}$$

（注意，$p_*\frac{1+u}{1+r}$和 $(1-p_*)\frac{1+d}{1+r}$之和为 1。）直接推导或利用看跌期权—看涨期权平价可以得到看跌期权的公式。

这些重要的结果可以总结为如下定理，其中 $\Phi(m, N, p)$ 表示 N

次试验并且在每次试验中状态的概率为 p 的累积二项分布。

$$\Phi(m, N, p)=\sum_{k=0}^{m}\binom{N}{k}p^{k}(1-p)^{N-k}$$

定理 8.5（考克斯-罗斯-鲁宾斯坦公式（Cox-Ross-Rubinstein Formula)**）**

181

在二叉树模型中，施权价为 X，在 N 时段以后施权的欧式看涨期权和看跌期权的价格为：

$$C^{E}(0)=S(0)[1-\Phi(m-1, N, q)]-(1+r)^{-N}X[1-\Phi(m-1, N, p_{*})]$$

$$P^{E}(0)=-S(0)\Phi(m-1, N, q)+(1+r)^{-N}X\Phi(m-1, N, p_{*})$$

最初的复制资产组合 $x(1)$，$y(1)$ 为

	$x(1)$	$y(1)$
看涨期权	$1-\Phi(m-1, N, q)$	$-(1+r)^{-N}X[1-\Phi(m-1, N, p_{*})]$
看跌期权	$-\Phi(m-1, N, q)$	$(1+r)^{-N}X\Phi(m-1, N, p_{*})$

练习 8.7

假设 $S(0)$ 为 50 美元，$r=5\%$，$u=0.3$，$d=-0.1$。计算施权价 $X=60$ 美元，3 个时段（$N=3$）以后施权的欧式看涨期权和看跌期权的价格。

练习 8.8

假设 $S(0)$ 为 50 美元，$r=0.5\%$，$u=0.01$，$d=-0.01$。计算 m，$x(1)$ 和施权价 $X=60$ 美元，$N=50$ 时段以后施权的欧式看涨期权的价格 $C^{E}(0)$。

练习 8.9

考虑每个时期股票上涨的状况，在哪一个状态下，欧式看涨期权的德尔塔值将变成 1?

8.2 在二叉树模型中的美式期权

尽管用公式表示美式未定权益价格的数学定义有些困难，可是非正

规的描述是简单的：期权可以在满足条件 $0 \leqslant n \leqslant N$ 的时段 n 施权，其回报为 $f(S(n))$。当然只能施权一次。美式期权在时间 n 的价格用 $D^{A}(n)$ 表示。

182

首先，我们分析在两个时段以后施权的美式期权。除非期权已经被施权，否则在到期时它的价值为

$$D^{A}(2) = f(S(2))$$

这里我们有取决于 $S(2)$ 价值的三个值。在时间 1 期权的持有者可以选择立刻施权，其回报为 $f(S(1))$；或者等到时间 2，这时美式期权的价值将变成 $f(S(2))$，$f(S(2))$ 可以当作单期欧式未定权益在时间 1 定价以计算等待情况的价值，于是，时间 1 的价值为

$$\frac{1}{1+r}[p_* f(S(1)(1+u)) + (1-p_*) f(S(1)(1+d))]$$

期权的持有者可以在这一价值和立刻得到的回报 $f(S(1))$ 之间作出选择。因此，美式期权在时间 1 的价值是两个价值的较高者，即

$$\begin{aligned} D^{A}(1) &= \max\left\{ f(S(1)), \frac{1}{1+r}[p_* f(S(1)(1+u)) \right. \\ &\qquad \left. + (1-p_*) f(S(1)(1+d))] \right\} \\ &= f_1(S(1)) \end{aligned}$$

（取两个值的随机变量），其中

$$\begin{aligned} f_1(x) = \max\left\{ f(x), \frac{1}{1+r}[p_* f(x(1+u)) \right. \\ \left. + (1-p_*) f(x(1+d))] \right\} \end{aligned}$$

通过类似的论证可以得到美式期权在时间 0 的价值，即

$$\begin{aligned} D^{A}(0) = \max\left\{ f(S(0)), \frac{1}{1+r}[p_* f_1(S(0)(1+u)) \right. \\ \left. + (1-p_*) f_1(S(0)(1+d))] \right\} \end{aligned}$$

例 8.1

为了说明上面的方法，考虑一个美式看跌期权，其施权价 $X = 80$ 美元；在时间 2 到期；股票的初始价格 $S(0) = 80$ 美元；二叉树模型中的 $u = 0.1$，$d = -0.05$，$r = 0.05$。（我们考虑看跌股票期权，因为我们知道美式看涨期权和欧式看涨期权的价值相同，见定理 7.4）股票的价值为

n	0		1		2
					96.80
			88.00	<	
$S(n)$	80.00	<			83.60
			76.00	<	
					72.20

183

我们用 $P^A(n)$ 表示美式看跌期权的价格，其中 $n=0$，1，2。在到期日的回报只有两次下跌状况下为正，即

n	0		1		2
					0.00
			?	<	
$P^A(n)$	?	<			0.00
			?	<	
					7.80

在时间 1，期权的持有者可以选择立刻施权或者等到时间 2。在时间 1 价格上涨的状态下，立刻施权的回报和选择等待的价值都为零；在下跌的状态下，立刻施权的回报为 4 美元，而等待的价值为 $1.05^{-1}\times\frac{1}{3}\times 7.8\cong 2.48$ 美元。期权的持有者将选择较高的值（即在价格下跌的状态下，在时间 1 施权）。这样就可以得出美式看跌期权在时间 1 的价值：

n	0		1		2
					0.00
			0.00	<	
$P^A(n)$	?	<			0.00
			4.00	<	
					7.80

在时间 0，也是在如下二者之间进行选择：回报为零，等待的价值为 $1.05^{-1}\times\frac{1}{3}\times 4\cong 1.27$ 美元。我们取其中较高者，这样就完成了期权价格树，即

n	0		1		2
					0.00
			0.00	<	
$P^A(n)$	1.27	<			0.00
			4.00	<	
					7.80

比较可见，欧式看跌期权的价格 $P^{E}(0)=1.05^{-1}\times\frac{1}{3}\times2.48\cong0.79$ 美元，显然小于美式看跌期权的价格 $P^{A}(0)\cong1.27$ 美元。

这种方法可以一般化，引出如下定义。

定义 8.1

回报函数为 f，在时间 N 到期的**美式衍生证券**或者**未定权益**是由后向引入定义的随机变量序列，即

184

$$
\begin{aligned}
D^{A}(N) &= f(S(N)) \\
D^{A}(N-1) &= \max\Big\{f(S(N-1)),\ \frac{1}{1+r}[p_{*}f(S(N-1)(1+u)) \\
&\qquad +(1-p_{*})f(S(N-1)(1+d))]\Big\} \\
&=: f_{N-1}(S(N-1)) \\
D^{A}(N-2) &= \max\Big\{f(S(N-2)),\ \frac{1}{1+r}[p_{*}f_{N-1}(S(N-2)(1+u)) \\
&\qquad +(1-p_{*})f_{N-1}(S(N-2)(1+d))]\Big\} \\
&=: f_{N-2}(S(N-2)) \\
&\ \ \vdots \\
D^{A}(1) &= \max\Big\{f(S(2)),\ \frac{1}{1+r}[p_{*}f_{2}(S(1)(1+u)) \\
&\qquad +(1-p_{*})f_{2}(S(1)(1+d))]\Big\} =: f_{1}(S(1)) \\
D^{A}(0) &= \max\Big\{f(S(0)),\ \frac{1}{1+r}[p_{*}f_{1}(S(0)(1+u)) \\
&\qquad +(1-p_{*})f_{1}(S(0)(1+d))]\Big\}
\end{aligned}
$$

练习 8.10

计算在时间 3 到期的施权价 $X=62$ 美元的美式看涨期权的价值。股票的初始价值为 $S(0)=60$ 美元；在二叉树模型中，$u=0.1$，$d=-0.05$，$r=0.03$。

练习 8.11

比较施权价 $X=120$ 美元，在时间 2 到期的美式看涨期权和欧式看涨期权的价格。股票的初始价格$S(0)=120$ 美元；在二叉树模型中，$u=0.2$，$d=-0.1$，$r=0.1$。

例 8.2

修改练习 8.11 可以证明，如果支付红利，美式看涨期权和欧式看涨期权价格相等的结论不再成立。假设在时间 2 支付红利 14 美元，我们仍然用与练习 8.11 相同的数据，除净红利的股票价格为

185

n	0		1		2
					158.80
			144.00	<	
$S(n)$	120.00	<			115.60
除净红利			108.00	<	
					83.20

相应的欧式看涨期权和美式看涨期权的价值为

n	0		1		2
					38.80
					38.80
			23.52	<	
			24.00		
$C^E(n)$	14.25	<			0.00
$C^A(n)$	14.55				0.00
			0.00	<	
			0.00		
					0.00
					0.00

美式期权在时间 1 价格上涨时被施权，这时的回报为 24 美元（粗黑体数字），它高于持有至到期日的价值。因此，美式看涨期权的价值高于欧式看涨期权的价值。

练习 8.12

假设欧式看跌期权和美式看跌期权的施权价 $X=14$ 美元；在时间 2 到期。$S(0)=12$ 美元；在二叉树模型中，$u=0.1$，$d=-0.05$，$r=0.02$；在时间 1 支付红利 2 美元。计算美式看跌期权和欧式看跌期权的价格。

8.3 布莱克-斯科尔斯公式

我们将简要论述关于连续时间看涨期权和看跌期权的著名的布莱克-

186 斯科尔斯公式。我们对连续时间论述不追求数字上的严谨，严格的数字证明需要系统地学习随机分析。随机分析将在更高级的教程中详细地研究。我们将利用与离散时间的类比替代严格的数字证明。

首先我们认为第 3 章研究的连续时间模型可以度量二叉树模型当时间间隔趋向零时的极限。连续时间股票价格模型为

$$S(t)=S(0)\mathrm{e}^{mt+\sigma W(t)} \tag{8.5}$$

式中，$W(t)$ 是标准的维纳过程（布朗运动），见 3.3.2 节。特别地，这意味着，$S(t)$ 服从对数正态分布。

考虑回报为 $f(S(T))$，在时间 T 到期的欧式股票期权在离散时间的情况（见定理 8.4）。期权在时间 0 的价格 $D(0)$ 应当等于折现回报 $\mathrm{e}^{-rT}f(S(T))$ 的期望，即

$$D(0)=E_*(\mathrm{e}^{-rT}f(S(T))) \tag{8.6}$$

在风险中性概率 P_* 下，折现价格过程 $\mathrm{e}^{-rt}S(t)$ 是鞅。利用与离散时间的类比，我们不加证明地接受这个公式。（证明基于与随机分析相关的鞅论证，超出了本书的范围。）

那么，什么是风险中性概率 P_*？一个必要条件是，折现股票价格过程 $\mathrm{e}^{-rt}S(t)$ 的期望应当是常数（与 t 无关），恰似离散时间的情况，见式 (3.5)。

让我们利用市场的真实概率 P 计算在概率 P 下的这个期望。因为 $W(t)$ 服从均值为零、方差为 t 的正态分布，在概率 P 之下，密度函数为 $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}}$，因此

$$\begin{aligned}E(\mathrm{e}^{-rt}S(t)) &= S(0)E(\mathrm{e}^{\sigma W(t)+(m-r)t})\\&= S(0)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\sigma x+(m-r)t}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}}\mathrm{d}x\\&= S(0)\mathrm{e}^{(m-r+\frac{1}{2}\sigma^2)t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\sigma t)^2}{2t}}\mathrm{d}x\\&= S(0)\mathrm{e}^{(m-r+\frac{1}{2}\sigma^2)t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2t}}\mathrm{d}y\\&= S(0)\mathrm{e}^{(m-r+\frac{1}{2}\sigma^2)t}\end{aligned}$$

如果 $m+\frac{1}{2}\sigma^2\neq r$，则期望 $E(\mathrm{e}^{-rt}S(t))=S(0)\mathrm{e}^{(m-r+\frac{1}{2}\sigma^2)t}$ 显然依赖于 t，于是 $S(t)$ 在 P 之下不可能是鞅。

187 而上面的积分启示我们将 P 换为 P_*，消去期望的因子 $\mathrm{e}^{(m-r+\frac{1}{2}\sigma^2)t}$，将会使相应的期望 $E_*(\mathrm{e}^{-rt}S(t))$ 与 t 无关。如果 P 可以被 P_* 代替，使得 $V(t)=W(t)+\frac{\left(m-r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma}$（而不是 $W(t)$ 本身）变成在概率 P_* 之下

的维纳过程，则指数因子 $e^{(m-r+\frac{1}{2}\sigma^2)t}$将从最后的表达式中消去（这个概率的存在性可从随机分析的更高级结果得出，即吉尔萨诺夫定理（Girsanov theorem））。实际上，因为 $V(t)$ 在 P_*之下的密度函数为 $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$，即它服从均值为零、方差为 t 的正态分布，由此得出

$$
\begin{aligned}
E_*(e^{-rt}S(t)) &= S(0)E_*(e^{\sigma W(t)+(m-r)t}) \\
&= S(0)E_*(e^{\sigma V(t)-\frac{1}{2}\sigma^2 t}) \\
&= S(0)\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma x-\frac{1}{2}\sigma^2 t}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}\,dx \\
&= S(0)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x-\sigma t)^2}{2t}}\,dx \\
&= S(0)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}\,dy = S(0)
\end{aligned}
$$

$E_*(e^{-rt}S(t))=S(0)$ 与 t 无关的事实是折现价格 $e^{-rt}S(t)$ 在 P_*之下是鞅的必要条件，为证明在 p_*之下 $e^{-rt}S(t)$ 确实是鞅，实际上需要验证更强的条件

$$E_*(e^{-rt}S(t)\,|\,S(u)) = e^{-ru}S(u) \tag{8.7}$$

对任意的 $t\geqslant u\geqslant 0$ 成立，这个条件包含了给定 $S(u)$ 时，$e^{-rt}S(t)$ 的条件期望。在第 3 章中，我们已经研究过条件期望，第 3 章中的条件是用离散随机变量给出的，见 3.2.2 节。而本节中的条件我们用 $S(u)$ 表示，它是连续分布的随机变量。在这种情况下，式（8.7）精确的数学含义是对任意的 $a>0$，有

$$E_*(e^{-rt}S(t)1_{S(u)<a}) = E_*(e^{-ru}S(u)1_{S(u)<a}) \tag{8.8}$$

式中，$1_{S(u)<a}$是随机变量的**示性随机变量**。如果 $S(u)<a$，则 $1_{S(u)<a}=1$；如果 $S(u)\geqslant a$，则 $1_{S(u)<a}=0$。

练习 8.13

验证等式（8.8）。

练习 8.14

在风险中性概率 P_*之下，计算 $W(t)$ 的密度函数。

188

我们已经识别了风险中性概率 P_*，下面我们将考虑到期日为 T，施权价为 X 的欧式看涨期权的价格。我们将期权价格的一般公式（8.6）变为

$$C^{\mathrm{E}}(0)=E_*(\mathrm{e}^{-rT}(S(T)-X)^+)$$

然后计算这个期望。因为 $V(t)=W(t)+\left(m-r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{t}{\sigma}$，当 $t\geqslant 0$ 时，在 P_* 之下是维纳过程，随机变量 $V(T)=W(T)+\left(m-r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{T}{\sigma}$ 服从均值为 0，方差为 T 的正态分布，即它的密度函数为 $\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2T}}$，因此

$$\begin{aligned}
C^{\mathrm{E}}(0) &= E_*(\mathrm{e}^{-rT}(S(T)-X)^+)\\
&= E_*((S(0)\mathrm{e}^{\sigma V(t)-\frac{1}{2}\sigma^2 T}-X\mathrm{e}^{-rT})^+)\\
&= \int_{-d_2\sqrt{T}}^{\infty}(S(0)\mathrm{e}^{\sigma x-\frac{1}{2}\sigma^2 T}-X\mathrm{e}^{-rT})\,\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2T}}\mathrm{d}x\\
&= S(0)\int_{-d_1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y-X\mathrm{e}^{-rT}\int_{-d_2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y\\
&= S(0)N(d_1)-X\mathrm{e}^{-rT}N(d_2)
\end{aligned}$$

式中，
$$d_1=\frac{\ln\frac{S(0)}{X}+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}},\quad d_2=\frac{\ln\frac{S(0)}{X}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\tag{8.9}$$

$$N(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y=\int_{-x}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y\tag{8.10}$$

是正态分布函数。

对于欧式看涨期权，我们推导出了著名的布莱克-斯科尔斯公式。选择时间 0 计算期权价格是武断的做法。一般地，在任意的 $t<T$，都应能计算期权价格。在这种情况下，期权到期时间还剩下 $T-t$。将式 (8.9) 上面的公式中的 0 用 t 代替，T 用 $T-t$ 代替。我们就可以得到下面的结论。

定理 8.6 (布莱克-斯科尔斯公式)

到期时间为 T，施权价为 X 的欧式看涨期权在时间 $t<T$ 的价格是

$$C^{\mathrm{E}}(t)=S(t)N(d_1)-X\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(d_2)$$

189 式中，

$$d_1=\frac{\ln\frac{S(t)}{X}+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\tag{8.11}$$
$$d_2=\frac{\ln\frac{S(t)}{X}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

练习 8.15

对于到期日为 T，施权价为 X 的欧式看跌期权，推导布莱克-斯

科尔斯公式

$$P^{E}(t)=Xe^{-r(T-t)}N(-d_2)-S(t)N(-d_1)$$

其中，d_1 和 d_2 由式（8.11）给出。

注 8.2

注意，布莱克-斯科尔斯公式中不包含 m。这个性质类似于注 8.1，并且有类似的实际意义：在连续时间计算欧式看涨期权或看跌期权的价格不需要知道 m。

我们来比较欧式看涨期权的布莱克-斯科尔斯公式与考克斯-罗斯-鲁宾斯坦公式。两者非常类似，除了连续折现因子 e^{-rT} 和离散折现因子 $(1+r)^{-N}$ 明显地类似之外，出现在这两个公式中的二项分布和正态分布也是相互相关的。这个关系源于中心极限定理：可以证明由考克斯-罗斯-鲁宾斯坦公式给出的期权价格会按第 3 章描述的极限趋向于连续时间的布莱克-斯科尔斯公式。

190

与其研究这个极限的细节，还不如参照图 8—2。该图表示的是施权价 $X=100$ 美元的欧式看涨期权的价格 C^{E}，股票价格 $S(0)=100$，$\sigma=0.3$，$m=0.2$。（尽管 m 与布莱克-斯科尔斯公式无关，但在离散时间过程会保持它的特性。）连续时间复合利率取 $r=0.2$，期权价格作为到期前的剩余时间 T 的函数，按以下两种方法计算：

(a)（粗黑线）来自 T 在 0 和 1 之间的布莱克-斯科尔斯公式。

(b)（点线）利用考克斯-罗斯-鲁宾斯坦公式，时间为 0 增加到 1，$N=10$ 期，每期期限 $\tau=0.1$，每一期的增长率利用公式（3.7）计算。

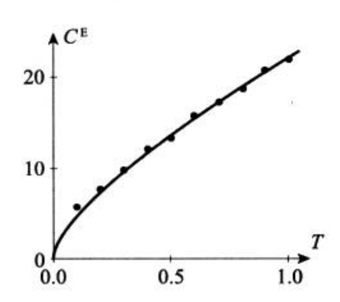


图 8—2　连续时间模型和离散时间模型的期权在被施权之前价格 C^{E} 作为时间 T 的函数

即使在 10 期的情况下，离散时间和连续时间的公式也表现出很好的契合度。

第 9 章 金融工程

191 我们在本章中将展示衍生证券在各种情况下的风险暴露管理中的应用。我们将借助于某些例子和小案例进行描述。尽管我们的论述与一些特定的环境相关，但这些方法适用于金融管理者面临的更大范围的业务。

首先我们介绍消除或减小卖出期权引发的风险的方法。发行和销售衍生证券，同时又不希望承担连带风险的金融机构将面临这个问题。这样的机构是通过其服务获得佣金，而不用取得市场中的活跃的期权头寸。

其次，我们分析减少来自某些商业活动引发的不可预料的风险的方法。案例研究涉及外汇风险。用同样的方法可以处理来自诸如商品的价格、利率和股票价格不可预测的未来变化的风险。我们将引入称为**风险价值**（value at risk，VaR）的风险度量。这种方法现在非常流行。衍生证券被用于构建资产组合，目的是减少这种风险。

最后，我们考虑应用期权构造**杠杆投资**（levered investment），它在增加风险的同时会产生更高的期望收益。

9.1 期权头寸套期保值

192 欧式看涨期权的卖出者在期权用货币结算时将面临风险。看涨期权

卖出者的风险利润为 $C^{E}e^{rT}-(S(T)-X)^{+}$，其中 $C^{E}e^{rT}$ 为收到的期权费进行无风险投资在施权时间 T 的价值。理论上，卖出者的损失可以是无限的。看跌期权风险利润为 $P^{E}e^{rT}-(X-S(T))^{+}$，卖出者的损失是有限的，尽管与收到的期权费 P^{E} 相比可能非常大。我们将论述如何利用构建合适的资产组合在短时期内清除或至少减小这种风险。如果有必要，这个资产组合可以由标的资产和卖出相同资产的衍生证券构成。

实际上，不可能在直到施权时间 T 的全部时期内，利用完善的方法构建单一的资产组合套期保值。套期保值资产组合需要随着影响期权的各种变量的变化随时调整。根据存在交易成本的实际情况，不可能太频繁地调整，我们需要某些折中的策略。尽管如此，我们在本节中仅论述在一个单一的短时间段内，不考虑交易成本的套期保值。

9.1.1 德尔塔套期保值

由布莱克-斯科尔斯公式给出的看涨期权和看跌期权的价值显然依赖于标的资产的价格。我们可以对其稍加扩展。

考虑一个资产组合，它的价值取决于当前的股票价格 $S=S(0)$，用 $V(S)$ 表示资产组合的价值。资产组合的价值对于 S 的依赖性可用导数 $\frac{d}{dS}V(S)$ 测量，称为资产组合的德尔塔。对于从 S 到 $S+\Delta S$ 的很小价格的变化，资产组合的价值改变量为

$$\Delta V(S)\cong\frac{d}{dS}V(S)\times\Delta S$$

德尔塔套期保值（delta hedging）的原理是，基于在资产组合中包含衍生证券，当 S 发生变化时其价值的改变不是很大。这可以通过资产组合的德尔塔等于零达到。这样的资产组合称为**德尔塔风险中性**资产组合。

我们构造一个由股票、债券和套期保值的衍生证券构造的资产组合，其价值为

$$V(S)=xS+y+zD(S)$$

式中，$D(S)$ 为衍生证券的价格；债券当前的价格为 1。特别地，假设卖出单一的衍生证券，即 $z=-1$，那么

193

$$\frac{d}{dS}V(S)=x-\frac{d}{dS}D(S)$$

$\frac{d}{dS}D(S)$ 为衍生证券的德尔塔，如果指定股票价格的模型就可以将其计算出来，这样就可以得出 $D(S)$ 的显式公式。

命题 9.1

假设 $C^E(S)$ 为欧式看涨期权的价格，在布莱克-斯科尔斯模型中，这个期权的德尔塔为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S}C^E(S)=N(d_1)$$

式中，$N(x)$ 为由式（8.10）给出的正态分布函数；d_1 由式（8.9）定义。

证明

价格 $S=S(0)$ 出现在布莱克-斯科尔斯公式中的三个地方，见定理 8.6，于是推导过程需要的工作量较少，在适当的时候，好多项可以消去，留给读者证明。记住导数$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S}C^E(S)$ 是在时间 $t=0$ 时计算的。 □

练习 9.1

在布莱克-斯科尔斯模型中，计算欧式看跌期权的德尔塔$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S}P^E(S)$ 类似的表达式。

在本节余下的部分我们将考虑布莱克-斯科尔斯模型中的看涨期权。根据命题 9.1，资产组合 $(x, y, z)=(N(d_1), y, -1)$，其中股票头寸 $N(d_1)$ 是按照股票的初始价格 $S=S(0)$ 计算的。对于任意的货币市场头寸 y，德尔塔等于零。因此资产组合的价值

$$V(S)=N(d_1)S+y-C^E(S)$$

在股票价格 S 对初始价格产生微小变化的情况下，$V(S)$ 的变化不是很大。选择 y 使得资产组合的值等于零是方便的。根据布莱克-斯科尔斯 $C^E(S)$ 公式，有

$$y=-Xe^{-Tr}N(d_2)$$

194 式中，d_2 由式（8.9）给出。

让我们分析如下例子，在其中陆续加以扩展和调整。假设无风险利率为 8%，考虑 90 天的看涨期权，其施权价 $X=60$ 美元，股票当前的价格 $S=60$ 美元；股票的波动率 $\sigma=30\%$。根据布莱克-斯科尔斯公式 $C^E=$ 4.144 52 美元，期权的德尔塔等于 0.581 957。

假设我们卖出 1 000 份看涨期权，得到期权费 4 144.52 美元。为了完成套期保值，我们购买 581.96 股股票，金额为 34 917.39 美元，借入 30 772.88 美元。构造的资产组合为 (x, y, z)，其中 $x=581.96$，$y=-30\ 772.88$，$z=-1\ 000$，其总价值为零。（在数学上，我们更自然地会考虑一个 $z=-1$ 的单个期权。但在实际中，期权是成批交易的。）

根据一些可能的状况，我们将分析 1 天以后资产组合的价值。到期时间为 89 天。假设股票波动率、无风险利率不变，考虑股票价格的以下三个状况：

1. 股票价格保持不变，$S\left(\frac{1}{365}\right)=60$ 美元。1 份期权现在的价值为 4.118 33 美元，于是来自于期权的空头头寸的负债减小了。由于利息支付，金融市场的债务增加。股票头寸的价值与开始时相同。这天的总余额为

股票	34 917.39
货币	−30 779.62
期权	−4 118.33
累计	**19.44**

不采用套期保值（$x=0, y=4\ 118.33, z=-1\ 000$），我们的财富为 27.10 美元，即从期权减少的价值和将期权费进行无风险投资得到的利息中我们将获利。

2. 股票价格上涨到 $S\left(\frac{1}{365}\right)=61$ 美元。期权现在的价值为 4.721 50 美元，比原来的价值多。不套期保值（**无抵补**（naked））将损失 576.07 美元。另一方面，德尔塔风险中性资产组合的持有者的头寸的损失几乎可以被增加的股票价值抵消，即

股票	35 499.35
货币	−30 779.62
期权	−4 721.50
累计	**−1.77**

195

3. 股票价格降低到 $S\left(\frac{1}{365}\right)=59$ 美元。卖出的期权的价值减小，单个期权现在的价值为 3.559 08 美元。持有的股票的价值也在减小。这个资产组合将产生损失，即

股票	34 335.44
货币	−30 779.62
期权	−3 559.08
累计	**−3.26**

在这种状况下，不进行套期保值似乎更好些，因为如果不进行套期保值，我们将得到 586.35 美元。

在股票价格保持不变的情况下，套期保值资产组合将产生利润，这或许会令人感到吃惊。一般性的结论我们将在练习 9.5 中论述。

练习 9.2

计算使得 1 天的套期保值资产组合达到最大值的股票价格。

练习 9.3

假设卖出 50 000 份看跌期权，其施权日为 90 天，施权价 $X=1.80$ 美元，股票当前的价格 $S(0)=1.82$ 美元，波动率 $\sigma=14\%$，无风险利率 $r=5\%$。构造一个德尔塔风险中性资产组合，假设 1 天以后股票价格下降到 $S\left(\frac{1}{365}\right)=1.81$ 美元，计算资产组合的价值。

回到上面的例子，让我们汇总 1 天以后各种股票价格的德尔塔风险中性套期保值资产组合的价值 V，并与不利用套期保值头寸的价值 U 进行比较：

S	V	U
58.00	−71.35	1 100.22
58.50	−31.56	849.03
59.00	−3.26	586.35
59.50	13.69	312.32
60.00	19.45	27.10
60.50	14.22	−269.11
61.00	−1.77	−576.07
61.50	−28.24	−893.53
62.00	−64.93	−1 221.19

196

如果股票价格发生较大的改变，我们会看到：

S	V	U
50	−2 233.19	3 594.03
55	−554.65	2 362.79
60	19.45	27.10
65	−481.60	−3 383.73
70	−1 765.15	−7 577.06

如果我们担心这样大的价格改变会发生，则上面的套期保值就不是一个令人满意的做法。如果我们不套期保值，至少在股票价格下跌时有结果为正的机会。同时，无论股票是上涨还是下跌，德尔塔风险中性资

产组合都可能引发损失，尽管与无抵补头寸相比非常小。

让我们看一看如果 1 天以后，除了股票价格其他变量也发生变化将会怎样。

1. 假设利率增加到 9%，波动率如前。某些损失是期权价值增加的结果。对 1 天的现金贷款利息没有影响，因为新的利率仅影响 2 天及 2 天以后的利息支付。套期保值资产组合的价值如下表第 2 列所示。

2. 假设 σ 增加到 32%，利率保持在原来的 8%水平，期权的价值将有相当多的增长，这不可能由股票头寸补偿，甚至在股票价格上涨时。结果如下表第 3 列所示。

S	V	
	$r=9\%$，$\sigma=30\%$	$r=8\%$，$\sigma=32\%$
58.00	−133.72	−299.83
58.50	−97.22	−261.87
59.00	−72.19	−234.69
59.50	−58.50	−218.14
60.00	−55.96	−212.08
60.50	−64.38	−216.33
61.00	−83.51	−230.68
61.50	−113.07	−254.90
62.00	−152.78	−288.74

197

正如我们看到的，在某些情况下，德尔塔套期保值不能令人满意。我们需要增强当期的资产价格变动或者其他变量同时变动的套期保值的稳定性。因此，我们以后会引入一些理论工具再次研究这个例子。

练习 9.4

如果无风险利率降到 3%，计算 1 天德尔塔风险中性资产组合的价值。

9.1.2 用希腊字母表示的参数

我们将定义所谓的用希腊字母表示的参数（Greek 参数，Greek parameters）以描述资产组合对决定期权价格的各变量的敏感性。施权价 X 和到期日 T 在出售期权时是确定的，于是我们分析其余的 4 个变量 S，t，r，σ。

我们将包含股票和基于股票的未定权益的资产组合的价值记为这些变量的函数 $V(S, t, \sigma, r)$，我们定义

$$\mathrm{delta}_V = \frac{\partial V}{\partial S}$$

$$\mathrm{gamma}_V = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

$$\mathrm{theta}_V = \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\mathrm{vega}_V = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$$

$$\mathrm{rho}_V = \frac{\partial V}{\partial r}$$

对于这些变量的微小的变化 ΔS，Δt，$\Delta\sigma$，Δr，我们有下面的近似等式（根据泰勒公式），即

$$\Delta V \cong \mathrm{delta}_V \times \Delta S + \mathrm{theta}_V \times \Delta t + \mathrm{vega}_V \times \Delta\sigma + \mathrm{rho}_V \times \Delta r + \frac{1}{2}\mathrm{gamma}_V \times (\Delta S)^2$$

在这里，资产组合对某一个特殊变量微小变化的**免疫**（immunise）方法是使得相应的用希腊字母表示的参数等于零。例如，为对波动性变化的资产组合进行套期保值，我们应该构造一个 **vega 风险中性资产组合**（vega neutral portfolio），其 vega 等于零。为了保持 delta 套期保值利润，我们将设计一个资产组合，其 delta 和 vega 都等于零（**delta-vega 风险中性资产组合**（delta-vega neutral portfolio））。**delta-gamma 风险中性资产组合**（delta-gamma neutral portfolio）可以对股票价格的较大变化免疫，这些免疫的例子验证如下。

198

布莱克-斯科尔斯公式允许我们对单一期权计算导数。对于欧式看涨期权，我们有

$$\mathrm{delta}_{C^E} = N(d_1)$$

$$\mathrm{gamma}_{C^E} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{2\pi T}}\mathrm{e}^{-\frac{d_1^2}{2}}$$

$$\mathrm{theta}_{C^E} = -\frac{S\sigma}{2\sqrt{2\pi T}}\mathrm{e}^{-\frac{d_1^2}{2}} - rX\mathrm{e}^{-rT}N(d_2)$$

$$\mathrm{vega}_{C^E} = \frac{S\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{d_1^2}{2}}$$

$$\mathrm{rho}_{C^E} = TX\mathrm{e}^{-rT}N(d_2)$$

（用希腊字母表示的参数是在时间 $t=0$ 计算的。）

注 9.1

从上面的公式容易看出

$$\text{theta}_{C^E} + rS\,\text{delta}_{C^E} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \text{gamma}_{C^E} = rC^E$$

一般来说，可以证明任意欧式衍生证券的价格 D 满足布莱克-斯科尔斯方程，即

$$\frac{\partial D}{\partial t} + rS\frac{\partial D}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 D}{\partial S^2} = rD$$

练习 9.5

如果股票价格、波动率和无风险利率保持不变，证明初始值为零的对单一看涨期权套期保值的 **delta 风险中性资产组合**（delta neutral portfolio）将随时间的推移增加价值。

练习 9.6

推导看跌期权的用希腊字母表示的参数公式。

9.1.3 应用

199 为展示用希腊字母表示的参数的应用，我们考虑欧式看涨期权卖出者的套期保值头寸。

delta-gamma 套期保值。资产组合的构造基于使得 delta 和 gamma 都为零的情形。为此，形如 (x, y, z) 的资产组合是不够的。给定期权头寸，比如说 $z=-1\,000$，这里仅保留一个参数可以调整，即标的资产头寸 x。这允许我们做出 delta 为零的资产组合。为使得 gamma 也等于零，我们需要增加自由度。为此目的，我们考虑标的股票相同的另一个期权，例如 60 天以后施权，$\hat{T}=60/365$，施权价 $\hat{X}=65$ 的看涨期权，并构造资产组合 $(x, y, z, \hat{z})$，其中 $\hat{z}$ 为另一个期权的头寸。其他变量和以前的例子相同，$r=8\%$，$\sigma=30\%$，$S(0)=60$。

让我们汇总关于价格和用希腊字母表示的参数（这里将 vega 也包括进来，以后会有用）：

期权	到期时间	施权价	期权价格	delta	gamma	vega
原来的	90/365	60	4.144 52	0.581 957	0.043 688	11.634 305
另外的	60/365	65	1.378 26	0.312 373	0.048 502	8.610 681

我们选择 x 和 $\hat{z}$ 使得 delta 和 gamma 都为零，即

$$\text{delta}_V = x - 1\,000\text{delta}_{C^E} + \hat{z}\,\text{delta}_{\hat{C}^E} = 0$$
$$\text{gamma}_V = -1\,000\text{gamma}_{C^E} + \hat{z}\,\text{gamma}_{\hat{C}^E} = 0$$

并且选择货币头寸 y，使得资产组合的价值为零，即

$$V(S)=xS+y-1\,000C^{E}(S)+\hat{z}\hat{C}^{E}(S)=0$$

这样就可以得到线性方程组

$$x-581.957+0.312\,373\,\hat{z}=0$$
$$-43.688+0.048\,502\,\hat{z}=0$$

其解为 $x\cong 300.58$，$\hat{z}\cong 900.76$，由此得出 $\hat{y}\cong -15\,131.77$。于是，我们取得股票的多头、另外的期权的多头和现金空头。（我们已经有原来期权空头 $z=-1\,000$。）

1 天以后，如果股票价格上涨，原来的期权价格更高，增加了我们的义务，这将被股票价值增加和持有的另外的期权价值的增加抵消。如果股票价格下跌，则会出现相反的情况。在这两种情况下，由于 1 天以后的利息，会使得我们的货币债务增加。资产组合的价值由下表所示（为便于比较，我们还列出了 delta 风险中性资产组合的价值）。

200

$S\left(\frac{1}{365}\right)$	delta-gamma	delta
58.00	−2.04	−71.35
58.50	0.30	−31.56
59.00	1.07	−3.26
59.50	0.81	13.69
60.00	0.02	19.45
60.50	−0.79	14.22
61.00	−1.11	−1.77
61.50	−0.49	−28.24
62.00	1.52	−64.93

我们还可以看到，在给定的股票价格范围内，在实践上是安全的。对于股票价格较大的改变，与 delta 套期保值进行比较，我们的头寸状况也有所改善。

$S\left(\frac{1}{365}\right)$	delta-gamma	delta
50	−614.08	−2 233.19
55	−78.22	−554.65
60	0.02	19.45
65	63.13	−481.60
70	440.81	−1 765.15

可以预见，与 delta 风险中性资产组合相比，delta-gamma 风险中性资产组合对股票价格变动提供的保护更好。

delta-vega 套期保值。下面我们将对波动率的增加进行套期保值，而股票的价格保持很小的变化。和上面一样，可以利用构造包含另一个期权的 delta-vega 风险中性资产组合实现这一点，这个条件为

$$\text{delta}_V = x - 1\,000\text{delta}_{C^E} + \hat{z}\,\text{delta}_{\hat{C}^E} = 0$$
$$\text{vega}_V = -1\,000\text{vega}_{C^E} + \hat{z}\,\text{vega}_{\hat{C}^E} = 0$$

由这些条件，我们可以得到方程组

$$x - 581.957 + 0.312\,373\,\hat{z} = 0$$
$$-11\,634.305 + 8.610\,681\,\hat{z} = 0$$

其近似解为 $x \cong 159.89$，$z \cong 1\,351.15$，相应的货币头寸 $y \cong -7\,311.12$。

201

假设 1 天以后波动率增加，$\sigma = 32\%$。我们对 delta-vega 和 delta 套期保值结果进行比较，如下表所示。

$S\left(\frac{1}{365}\right)$	delta-vega	delta
58.00	−5.90	−299.83
58.50	−12.81	−261.87
59.00	−16.05	−234.69
59.50	−14.99	−218.14
60.00	−9.06	−212.08
60.50	2.27	−216.33
61.00	19.52	−230.68
61.50	43.17	−254.90
62.00	73.62	−288.74

练习 9.7

利用上面例子中的数据（股票价格 60 美元，波动率 30%，利率 8%），构造 delta-rho 风险中性资产组合以套期保值施权价为 60 美元，90 天以后施权的 1 000 个看涨期权的空头头寸。我们引入另一个 120 天后施权，施权价为 65 美元的看涨期权。分析资产组合价值对股票价格变化的敏感性。如果 1 天以后利率上升到 9%，与前面的结论进行比较；如果利率上升到 15%将会怎样?

前面的例子显示了套期保值策略的多样性，对策略的选择取决于个体的目标和偏好，我们没有涉及交易成本和长期套期保值问题，也没有

讨论其他衍生工具的最理想选择。基于三个用希腊字母表示的参数的资产组合还需要引入另外的衍生证券。它们可以提供综合性的**回补**（cover），尽管如果这些变量保持不变，它们的绩效会变坏。另外，如果包含交易成本，则是昂贵的。

9.2 经营风险套期保值

我们先引入风险测量的另一种方法，这需要初步了解衡量可能的损失的大小和概率的风险。

9.2.1 风险价值

202

我们利用一个简单的例子来介绍基本思想。我们以 $S(0)=100$ 美元买入 1 股股票，一年以后卖出。卖价 $S(1)$ 是随机的。如果 $S(1)<100\mathrm{e}^r$，我们将遭受损失，这里 r 是在连续复合之下的无风险利率。（可能是贷款融资购买；或者，如果初始金额是自有的，我们考虑被放弃的无风险投资机会。）损失小于给定的量的概率，例如

$$P(100\mathrm{e}^r-S(1)<20)$$

是多少呢？让我们反过来考虑这个问题，固定概率，比如说是 95%，我们寻求一个金额，使得损失不超过这个金额的概率为 95%，称它为在**置信水平**（confidence level）95%之下的风险价值，用 VaR 表示。于是 VaR 是一个金额，使得

$$P(100\mathrm{e}^r-S(1)<\mathrm{VaR})=95\%$$

应当指出，大多数的教科书在论述这部分内容时，都忽略了货币的时间价值，仅对 $r=0$ 定义 VaR。

例 9.1

假设股票价格服从对数正态分布；对数收益率 $k=\ln\frac{S(1)}{S(0)}$，服从正态分布，其均值 $m=12\%$，标准差 $\sigma=30\%$，以概率 95%收益率满足 $k>m+x\sigma\cong-37.50\%$，其中 $N(x)\cong5\%$。于是，$x\cong-1.645$（这里 $N(x)$ 为正态分布函数，满足式（8.10），其均值为 0，方差为 1）。于是以概率 95%，未来价格 $S(1)$ 满足

$$S(1) > S(0)e^{m+x\sigma} \cong 68.83\text{（美元）}$$

于是，给定 $r=8\%$，则

$$\text{VaR} = S(0)e^{r} - S(0)e^{m+x\sigma} \cong 39.50\text{（美元）}$$

练习 9.8

估计在 95％的置信水平上，对于 1 000 美元投资于欧元 1 年的 VaR。如果投资于欧元的无风险利率 $r_{\text{EUR}}=4\%$，欧元兑换美元的汇率服从 $m=1\%$，$\sigma=15\%$的正态分布。考虑所放弃的无风险投资于美元的机会，假设美元的无风险利率 $r_{\text{USD}}=5\%$。

练习 9.9

203

假设 1 000 美元投资于股票欧式看涨期权，股票现在的价格 $S(0)=60$ 美元。期权 6 个月以后到期，施权价 $X=40$ 美元。再假设 $\sigma=30\%$，$r=8\%$，股票对数收益率的期望是 12％。计算置信水平为 95％，6 个月以后的 VaR。计算股票的价格超过 5％的概率，并计算相应的最终回报。

9.2.2 案例研究

我们将讨论借助于衍生证券对 VaR 进行管理的一些方法。我们将利用经营活动的一些简单的例子，介绍这些方法。

案例 9.1

一个公司在英国制造商品，在美国出售，开始生产需要投资 500 万英镑。用于套期保值策略的资金可以以 16％的利率借到。考虑到风险因素，投资者要求的收益率为 25％。销售额是可预测的，年末为 8 000 000 美元；成本每年为 3 000 000 英镑。美元的利率为 8％，英镑的利率为 11％（假定连续复合）。现在的汇率为 1.6 美元兑换 1 英镑。汇率的对数收益的波动率估计为 $\sigma=15\%$。公司支付 20％所得税。

首先注意，为满足投资者的预期，公司应该一年获利 1 250 000 英镑用于支付红利。较低的利润意味着红利比要求的红利低。从投资者的观点看，这是损失。利润取决于年末的汇率 d。因此，某些风险会出现（我们假设其他值为预测值）。

首先，假设没有进行风险管理。

1. 无套期保值头寸。如果在年末汇率 d 为 1.6 美元兑换 1 英镑，那

204 么净盈利为 1 600 000 英镑，计算过程如下（所有的金额按英镑计）。

销售额	5 000 000
成本	−3 000 000
税前盈利	2 000 000
税	−400 000
税后盈利	1 600 000
红利	−1 250 000
结余	350 000

收入为 350 000 英镑。

而如果汇率 d 变成 2 美元兑换 1 英镑，则红利将减少，投资者最终损失 450 000 英镑（把全部红利作为假设的成本）：

销售额	4 000 000
成本	−3 000 000
税前盈利	1 000 000
税	−200 000
税后盈利	800 000
红利	−1 250 000
结余	−450 000

我们现在计算 VaR。假设汇率服从如下形式的对数正态分布

$$d(t)=d(0)\exp\left(\left(r_{\mathrm{USD}}-r_{\mathrm{GBP}}-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma\sqrt{t}N\right)$$

这里的 N 服从标准正态分布。[1] 以概率 95%，N 不超过 1.644 9，这对应于汇率 $d=d(1)\simeq 1.965\ 0$ 美元兑换 1 英镑。我们将这个情况表述如下（所有的金额按英镑计并四舍五入到整数位）：

销售额	4 071 290
成本	−3 000 000
税前盈利	1 071 290
税	−214 258
税后盈利	857 032
红利	−1 250 000
结余	−392 968

205 因此，VaR$\simeq$392 968 美元。最后的结果作为汇率的函数为

$$\begin{aligned}b(d)&=80\%\times\left(\frac{8\ 000\ 000}{d}-3\ 000\ 000\right)-1\ 250\ 000\\&=\frac{6\ 400\ 000}{d}-3\ 650\ 000\end{aligned}$$

保本汇率满足 $b(d)=0$，近似等于 1.753 4 美元兑换 1 英镑。在最优的状态下，英镑最弱，例如，下降到 1.5 美元兑换 1 英镑，最终的余额为

616 667 英镑。

问题是，如何管理这个风险暴露。

2. 远期合约。解决这个问题最容易的方法是，利用签订多头远期合约固定未来的汇率。远期利率为 $d(0)e^{r_{USD}-r_{GBP}}=1.6\times e^{-3\%}\cong 1.5527$ 美元兑换 1 英镑。因此，公司能得到如下的有保证结余的报表，但是如果汇率变得更有利，不可能获得更多的收益。

销售额	5 152 273
成本	−3 000 000
税前盈利	2 152 273
税	−430 455
税后盈利	1 721 818
红利	−1 250 000
结余	471 818

3. 利用期权完全套期保值。利用期权能够保证汇率不超过确定的水平，且在一段时间内能够保持与汇率有利变动相联系的利润。但这是有代价的，因为要支付期权费。

公司可以买入英镑的看涨期权。欧式看涨期权以施权价 1.6 美元购买 1 英镑的成本为 0.066 9 美元。[2]假设公司买 5 000 000 份看涨期权，支付 209 069 英镑，按 16%的利率借入这个金额。利息可在税前抵扣，使得贷款不是太昂贵。而最终结果还是令人失望：

206

销售额	5 000 000
成本	−3 000 000
息税前盈利	2 000 000
利息	−33 451
税前盈利	1 966 549
税	−393 310
净收入	1 573 239
还贷款	−209 069
红利	−1 250 000
结余	114 170

如果汇率下降到 1.5 美元兑换 1 英镑，期权将不会被施权，销售额将会达到 5 333 333 英镑，则存在一个正的最终结果即 380 837 英镑。仅当汇率下降到 1.468 7 美元兑换 1 英镑时，这个策略才能得到比远期合约套期保值更好的结果。

4. 利用期权部分套期保值。为减少期权的成本，公司可以买入部分看涨期权，为的是部分地抵补销售额中的美元数量。假设公司购买与完全套期保值情况相同的看涨期权 2 500 000 份，支付完全套期保值情形的一半期权费，收入的一半有风险暴露。为计算在 95%置信水平下的

VaR，我们假设这个金额与不存在套期保值情情况下一样，以 1.965 0 美元兑换 1 英镑交易，而另一半按施权价交易，即

销售额	4 535 645
成本	−3 000 000
息税前盈利	1 535 645
利息	−16 726
税前盈利	1 518 919
税	−303 784
净收入	1 215 136
还贷款	−104 534
红利	−1 250 000
结余	−139 399

如果汇率降到 1.5 美元兑换 1 英镑，投资者将有 498 752 英镑盈余。

207

5. 期权和远期合约的结合。最后，我们研究如果公司使用两种衍生工具套期保值将会怎样。其中的一半头寸利用期权套期保值，在最坏的情况下，公司将以 1.6 美元兑换 1 英镑的汇率，花费一半资金购买英镑；剩下的一半资金按远期汇率 1.552 7 美元兑换 1 英镑交易，结果显示如下(我们将所有策略总结在一起)：

策略	1	2	3	4	5
结果	−392 968	471 818	114 170	−139 339	292.994

这些结果是在 95%的置信水平，按 1.988 7 美元兑换 1 英镑汇率计算出来的。

显然，VaR 仅提供了各种策略结果的部分信息。图 9—1 显示了上面每一个策略作为汇率 d 的函数的最终结果的图形。图形标明了表中的策略数。远期合约的策略（策略 2）看起来是最安全的一个策略。坚决地认为英镑会大幅贬值的冒险的投资者宁愿**不抵补**（uncovered）（策略 1)。各种中间的策略也是可利用的。在考察这些图形时，汇率 d 的概率分布也应该考虑。

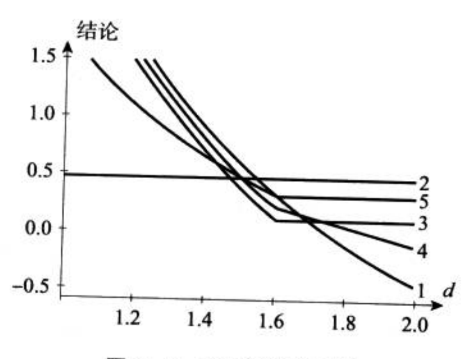


图 9—1　各种策略的比较

9.3 利用衍生产品投机

9.3.1 工具

208

为设计一个复杂的投资工具，我们利用期权建立一个平台，并假设投资者对于未来的股票价格有独特的观点，愿意承担风险。我们的任务是，设计一个证券的资产组合，它具有能够满足这类投资者的指定的回报。

假设投资者预料股票价格将上涨，并且想在股票上涨时投机。一个简单的方法是买入看涨期权。施权价 X' 接近于股票当前的价格的期权价格与股票自身价格相比相当便宜，可以制造一个有风险的杠杆头寸。我们在下面的案例研究中可以看出，利用卖出施权价 $X''>X'$ 的看涨期权可以减少期权费。按这种方法，我们能够建立一个**牛市差价期权**（bull spread），其回报如图 9—2 所示。如果股票的增长是适度的，这个策略将带来收益。

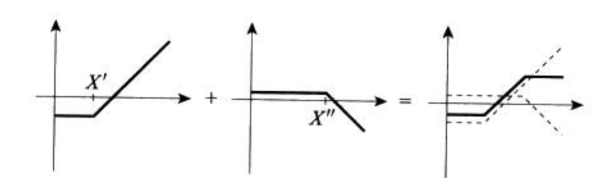


图 9—2　牛市差价期权

利用施权价 $X'<X''$ 的看跌期权，卖出前者，买入后者，我们可以构建当未来股票价格降低时具有正的回报的**熊市差价期权**（bear spread），如图 9—3 所示。这可以被预测股票价格会适度下降的投资者利用。

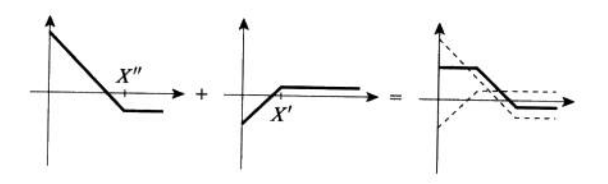


图 9—3　熊市差价期权

如果投资者认为股票价格将保持不变或者仅有微小的改变，则可选择**蝶式差价期权**（butterfly spread），它由三个施权价为 $X'<X''<X'''$ 的

看涨期权构成。两个看涨期权是买入的，其中一个的施权价为 X'，另一个的施权价为 X'''；另一个施权价为 X''的看涨期权是卖出的。图 9—4 显示出 X''是其他两个施权价平均值的情形。**转向蝶式期权** (reversed butterfly) 是相反的策略，当股票价格变动时可以带来利润。（在命题 7.8 的证明中，我们简单论述过蝶式差价期权。）

209

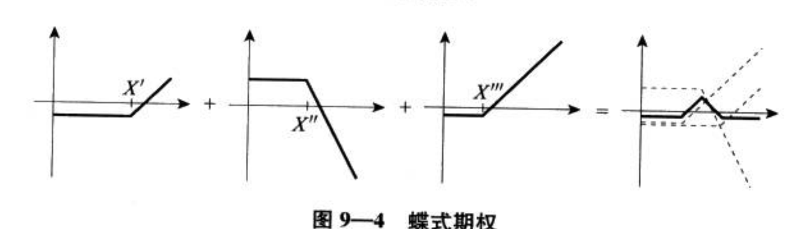


图 9—4 蝶式期权

最后，我们观察到，由任意直线段构成的连续回报函数可由看涨期权和看跌期权构造出来。图 9—5 概要地说明如何将目标利润逐步地分解到具有各种施权价格的期权资产组合中。每个施权价的期权数量的选择与目标利润的斜度相匹配。这样的结构足以满足实践的需要，因为任何连续的回报函数都可以用直线段近似。

9.3.2 案例研究

我们将资产组合理论方法和我们前面描述的工具相结合。考虑对资产的未来价格有特殊看法的投资者，他准备承受一定的风险，为的是增加期望收益。

案例 9.2

投资者拥有 15 000 美元，他相信下个月某只股票价格会上涨，股票预期年化收益率 $\mu_S=31\%$。当前的股票价格 $S(0)=60$ 美元。20 天到期的施权价为 60 美元的看涨期权的期权费为 2.112 美元。有效无风险利率为 12%。

210

我们利用二叉树模型分析这个案例。假设一天交易一次，股票上涨和下跌的概率相同。我们还简单地假设 1 年为 360 天。20 天的无风险利率 $r_F\cong 0.631\,6\%$（根据有效利率 12%得出）。15 000 美元进行无风险投资 20 天后将变成 15 094.74 美元。考虑如下的风险投资：

1. 股票。股票投资得到的期望收益 $\mu_S\cong 1.511\,5\%$（等价于年收益率 31%）。买入 250 股，投资者 20 天以后将会得到 15 226.72 美元，风险可由如下的期权价格估计出来。

2. 看涨期权。一个风险更大的替代做法是买入看涨期权。收益率是

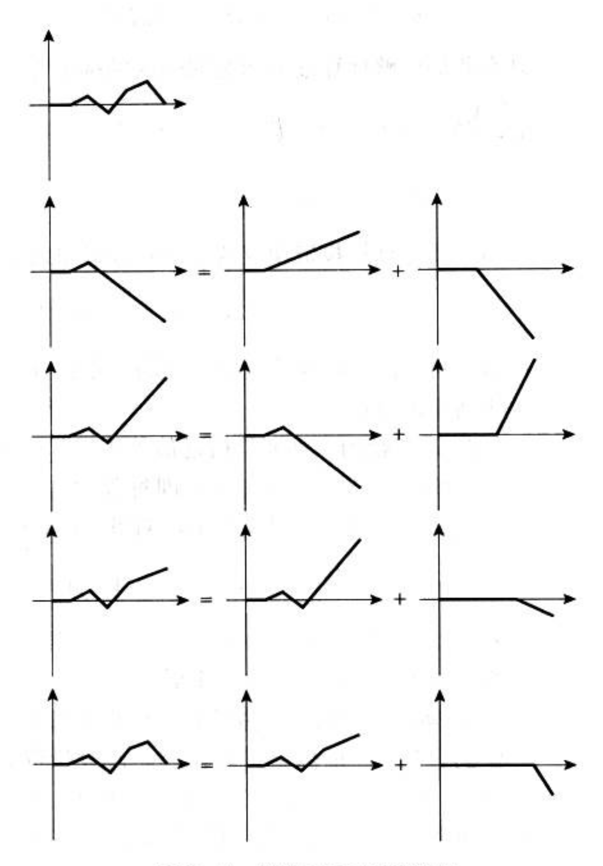


图 9—5　分解目标回报到期权

211　随机的，依赖于 20 天后的股票价格，即

$$K_C=\frac{\left(S\left(\frac{20}{365}\right)-60\right)^{+}-C}{C}$$

为计算期权的期望收益，我们计算由期权价格和股票期望收益构成的二叉树模型的参数，假设股票上涨和下跌的概率都是$\frac{1}{2}$。首先计算 1 天的无风险收益率

$$r=(1+12\%)^{\frac{1}{360}}-1\cong 0.031\,5\%$$

然后写出每天股票上涨和下跌使得年收益率为 31%的条件，即

$$\frac{u+d}{2}=(1+31\%)^{\frac{1}{360}}-1\cong 0.075\%$$

看涨期权的价格给出了 u 和 d 的另一个条件，最后我们得到如下值[3]：

$$u \cong 1.857\ 1\%,\ d \cong -1.707\ 0\%$$

现在我们能够计算这个问题期限内的标准差（利用市场的实际概率 $p_k = \binom{20}{k} 0.5^{20}$，$k=0, 1, \cdots, 20$），即

$$\sigma_S \cong 8.096\ 2\%$$

最后，我们计算投资期权的期望收益率和风险，

$$\mu_C \cong 14.845\ 3\%,\ \sigma_C \cong 153.969\ 3\%$$

收益是可观的，但风险也是可观的。注意有 0.411 9 的概率，投资者可能损失所有的货币。

3. 远期合约。远期价格近似等于 60.38 美元。假设签订远期合约需要股票价格的 20%的保证金，即每股 12 美元。投资者有能力签订 1 250 份远期合约。在二叉树模型中，期望收益和风险为

$$\mu_F \cong 4.399\ 3\%,\ \sigma_F \cong 40.481\ 1\%$$

注意，如果股票价格下降到 48.38 美元之下，投资者将损失保证金，并承受另外的损失，导致收益率低于－100%。

212

4. 期权与无风险投资结合。如果期权和无风险投资结合，则可以对一定的套利水平的风险进行调整。假设投资者愿意接受类似于股票投资的风险。投资 94.741 7%的资本于无风险资产，其余的投资于期权，投资者可以构造与股票具有相同的标准差的资产组合。但该资产组合的预期收益将略低于股票，即

$$\mu_P \cong 1.379\ 0\%,\ \sigma_P \cong 8.096\ 2\%$$

注 9.2

在 (σ, μ) 平面上，连接无风险资产 F 和任意另一个资产组合 A 的直线的斜率为 $\frac{\mu_A - r_F}{\sigma_A}$，称它为**风险的市场价格**。它可以用于比较不同的资产组合，斜率陡的那些更好。我们可以看到，上面的风险投资具有类似的风险的市场价格，每一种大约为 0.1。（如果股票价格使用布莱克-斯科尔斯模型，实际上这些值是相同的。）

如果我们考虑 VaR，可以看出投资于期权和无风险资产构成的资产组合的优点，两个不同的置信水平我们在下表中给出（这个选择与二叉树模型中的概率不矛盾）。另一方面，如果全部金额仅投资于期权，则 VaR 将非常高，即在给定的置信水平上将损失重大。

投资	股票	看涨期权	远期合约	期权与无风险资产
风险的市场价格	0.108 7	0.092 3	0.093 1	0.092 3
置信水平为 94.23% 的 VaR（美元）	1 931.78	15 000.00	9 753.85	788.75
置信水平为 99.41% 的 VaR（美元）	2 836.34	15 000.00	14 297.27	788.75

案例 9.3

对公司进行考察后，分析者得出结论：20 天以后，股票价格不会低于 58 美元，也不会超过 66 美元。所有的市场参数与案例 9.2 相同。从分析者的观点，对股票、期权、施权价为 58 美元和 60 美元的牛市差价期权的期望收益和风险进行比较。

213

我们建立一个可以反映分析者观点的简单的模型。分析者得到的额外的信息将产生与市场概率 P 相比较的调整概率。（与前面一样，我们假设在每个时段，股票上涨和下跌的概率都是$\frac{1}{2}$。）也就是，由分析者指定的概率 Q 是以事件 $58 \leqslant S(20) \leqslant 66$ 为条件的市场概率，特别地

$$Q(S(20)=x)=P(S(20)=x \mid 58 \leqslant S(20) \leqslant 66)$$
$$=\begin{cases} \dfrac{P(S(20)=x)}{P(58 \leqslant S(20) \leqslant 66)} & 58 \leqslant x \leqslant 66 \\ 0 & x<50 \text{ 或 } x>66 \end{cases}$$

因此，分析者将得到如下值。

1. 股票。在调整概率 Q 之下，有

$\mu_S \cong 2.678\ 8\%$，$\sigma_S \cong 3.925\ 7\%$

2. 看涨期权。取一个施权价 $X=58$ 美元的看涨期权，则有 $C^E \cong$ 3.292 3 美元（这个价格是由 20 天后股票价格没有任何限制的两叉树模型计算出的）。对在期权上的投资，我们有

$\mu_C \cong 9.569\ 3\%$，$\sigma_C \cong 71.544\ 1\%$

3. 牛市差价期权。我们购买一份施权价为 58 美元、卖出一份施权价为 60 美元的看涨期权构造差价期权。前者的期权费支付为 3.292 3 美元，于是这个差价期权的成本为 1.180 3 美元。期望收益和风险为

$\mu_{\text{bull}} \cong 38.409\ 4\%$，$\sigma_{\text{bull}} \cong 52.399\ 7\%$

4. 牛市差价期权与无风险资产结合。假设将资本的 94.580 9%投资于无风险资产，其余的投资于牛市差价期权，我们可以构造一个与股票

的期望收益相同但风险较低的资产组合 P，即

$$\mu_P \cong 2.6788\%，\sigma_P \cong 2.8396\%$$

从 VaR 的观点，我们考虑最坏的状态（在投资者接受的范围内）——当 $S(20) \cong 58.59$ 美元时，条件概率为 0.259 7。在这个状态下，上面的每一个投资都会带来损失，可以认为这是在 74.03%置信水平上的 VaR。这些 VaR 值和市场风险价格如下：

投资	股票	看涨期权	牛市差价期权	牛市差价期权与无风险资产
市场风险价格	0.5	0.1	0.7	0.7
置信水平为 74.03%的 VaR（美元）	447	12 409	7 602	412

214

牛市差价期权与无风险资产相结合显然是最好的，与其他的投资相比，这一策略具有最高的风险的市场价格和最低的 VaR。

练习 9.10

验证上面的计算结果，并考虑由一个买入施权价为 60 美元的看涨期权和卖出施权价为 62 美元的看涨期权构成的牛市差价期权的调整。计算期望收益、风险和 VaR。

练习 9.11

利用前面的二叉树模型框架，考虑一个分析者的情况。这个分析者确信股票价格会下跌，但 20 天以后下跌幅度不会超过 20%。对于一个由施权价为 56 美元和施权价为 58 美元的看跌期权构成的熊市差价期权，计算期望收益、风险和最坏的可能结果的 VaR。

【注释】

[1] 参见 Etheridge (2002)，Sect. 5.3。

[2] 取 $S(0)=d(0)\exp(-r_{GBP})$，$r=r_{USD}$，$t=1$，对期权应用 8.3 节的布莱克-斯科尔斯公式。

[3] 取任意的值 u，计算 20 天以后即 21 天的股票价格、期权的回报、风险中性概率和期权的最终价格。利用 Excel 软件中的单变量求解方法（**或试错法**（trial and error）），计算 u 值以使得期权的价格与给定的相同。

第 10 章　可变利率

215

本章从一个模型开始，在这个模型中，被债券隐含着的利率不取决于到期日。如果利率是确定的，那么利率必定为常数，且模型会变得太简单，不足以描述现实生活的状况。如果扩展到允许利率随机变化，则可以引入称为债券久期的数学工具处理风险管理问题。最后，我们将证明依赖于**到期日**（maturity-dependent）的利率也不可能是确定的，这就为下一章提供了研究动因和注释，我们在第 11 章中将论述随机利率模型。

与第 2 章一样，假设 $B(t, T)$ 为在时间 T（到期日）到期的单位债券在时间 t（**运行时间**（running time））的价格。对两个时间变量的依赖性使得债券价格模型在数学上产生了困难。这些价格对于精确地描述货币的时间价值是必需的。在第 2 章中，我们已经知道在利率为常数的假设之下，债券价格如何隐含利率。在本章中，我们将放松这个限制，允许利率是可变的。

在本章和第 11 章中，我们假设时间是离散的，尽管这个理论的某些部分可以容易地扩展到连续时间的情形。我们固定一个时间段 τ，记 $t=\tau n$ 为运行时间；$T=\tau N$ 为到期时间。在大多数例子中，我们取 $\tau=\frac{1}{12}$ 或者 $\tau=1$，并用记号 $B(n, N)$ 代替零息单位债券价格 $B(t, T)$。我们使用连续复合，这简化了符号，并能够始终如一地处理任何长度的时段。

10.1 与到期日无关的收益率

216

单位零息债券的现值确定的利率称为**收益率**（yield），并且用 $y(0)$ 表示，为的是强调从时间 0 开始计算的事实，即

$$B(0, N)=\mathrm{e}^{-N\tau y(0)}$$

对于满足条件 $0<n<N$ 的运行时间瞬间 n 隐含的收益率，一般来说与 $y(0)$ 不同。对于每一个 n，存在一个数 $y(n)$ 满足

$$B(n, N)=\mathrm{e}^{-(N-n)\tau y(n)}$$

一般地（在大多数实际情况中），具有不同到期日的债券隐含的收益率不同。然而，在本节中，我们将考虑一种简化的情况，其中 $y(n)$ 与 N 无关，即到期日不同的债券产生的收益率相同。从 10.2 节开始，我们将放松到期日的独立性。

命题 10.1

如果对某个 $n>0$，收益率 $y(n)$ 在时间 0 已知，则 $y(0)=y(n)$，否则存在套利机会。

证明

假设 $y(0)<y(n)$。（为确定不等式是否成立，我们必须知道 $y(0)$，而且还要知道 $y(n)$。）

- 借入 1 美元，借期从 0 到 $n+1$，并将它存入银行，存期从 0 到 n，两者的利率都是 $y(0)$（可以认为，收益率是存款和贷款的利率）。
- 在时间 n，取出存款和利息，总额为 $\mathrm{e}^{n\tau y(0)}$，以利率 $y(n)$ 将这个金额进行单时段投资。在时间 $n+1$ 有 $\mathrm{e}^{n\tau y(0)+\tau y(n)}$。初始贷款需要支付 $\mathrm{e}^{(n+1)\tau y(0)}$，导致一个正的余额 $\mathrm{e}^{n\tau y(0)}(\mathrm{e}^{\tau y(n)}-\mathrm{e}^{\tau y(0)})$，这就是套利利润。

相反的不等式 $y(0)>y(n)$ 可以用类似的模式处理。 □

练习 10.1

令 $\tau=\frac{1}{12}$。如果收益率与到期日无关，单位债券在时间 6（半年）到期，交易价格为 $B(0, 6)=0.932\,0$ 美元，$B(3, 6)=0.966\,5$ 美元，这两个价格在时间 0 已知，计算套利。

217

由命题 10.1，如果收益率与到期日无关，并且是确定性的（即对任意 $n\geqslant 0$，$y(n)$ 是预先已知的），则 $y(n)$ 必为常数，即 $y(n)=y$ 对所有

的n都成立。第2章就是这种情况，在第2章中，所有债券价格被单一利率确定。收益率$y(n)=y$，与n无关，y等于先前用r表示的常数无风险利率。

历史的债券价格展示了不同的画面：过去记录的债券价格隐含的收益率显然会随着时间的推移发生变化。在无套利模型中，如果承认收益率会随着时间的推移发生变化，但与到期日无关，我们应允许收益率是随机的，即是预先不可预测的，$y(n)$将会高于或低于$y(0)$。

因此，我们假设在每个时间瞬间，收益率$y(n)$是独立于基础证券到期日的正的随机数。

我们的目的是分析债券投资的回报率和利率随机变化引发的风险。假设我们准备投资确定的货币金额P，期限为N时段。如果收益率y保持不变，那么，正如我们在第2章中论述的，最终的财富将是$Pe^{N\tau y}$，这是我们应对未预料到的利率变动设计套期保值策略的基准。

10.1.1 在单个债券上的投资

如果我们投资于零息债券并持有至到期日，那么收益率是有保障的，因为最终的支付是事先固定的，不受将来利率变化的影响。但是，如果我们选择在到期日之前卖出债券，结束投资，我们就会面临在此期间利率变化对投资最终价值产生不利影响的风险。

例 10.1

假设我们投资于期限为6个月的债券，令$\tau=\frac{1}{12}$。我们买入1年以后到期的单位债券，每份债券支付$B(0, 12)=0.9300$美元，这个价格隐含的利率$y(0)\cong 7.26\%$。因为我们准备在时间$n=6$卖出债券，所以我们关心价格$B(6, 12)$或者相应的等价收益率$y(6)$。现在我们讨论以下几种可能的状况：

1. 利率是固定的，$y(6)=7.26\%$。债券价格为$B(6, 12)\cong 0.9644$，且投资的对数收益率为3.63%，等于利率的一半，符合对数收益率的可加性。

2. 假如利率减到$y(6)=6.26\%$（按惯例，0.01%为一个基点，于是这里利率下降了100个基点），那么，$B(6, 12)\cong 0.9692$，高于状况1中的价格，因此，可以获得更多收益，对数收益率达到4.13%。

218

3. 收益率增加到$y(6)=8.26\%$。在这种情况下，投资的对数收益率为3.13%，低于状况1，债券价格为$B(6, 12)\cong 0.9596$。

我们可以看到这样的模式：如果利率降低，则对债券持有者而言情

况变好；利率提高，则情况变坏。容易计算出这种投资收益的一般公式。

假设初始收益率 $y(0)$ 随机变化，在时间 n，$y(n)\neq y(0)$。因此

$$B(0,\ N)=\mathrm{e}^{-y(0)\tau N},\ B(n,\ N)=\mathrm{e}^{-y(n)\tau(N-n)}$$

在时间 n，结算投资的收益是

$$\begin{aligned}k(0,\ n)&=\ln\frac{B(n,\ N)}{B(0,\ N)}=\ln\ \mathrm{e}^{y(0)\tau N-y(n)\tau(N-n)}\\&=y(0)\tau N-y(n)\tau(N-n)\end{aligned}$$

我们可以看出，当 $y(n)$上升时，收益率会下降。利率变化对收益率的影响依赖于时间选择。例如，如果 $\tau=\frac{1}{12}$，$N=12$，$n=6$，那么，与利率不变的情况相比，利率增加 120 个基点将会导致收益率减少约 0.6%。

练习 10.2

令 $\tau=\frac{1}{12}$，投资 100 美元于 6 个月的零息债券；交易价格 $B(0,\ 6)=0.940\ 0$ 美元。在 6 个月之后再投资于同种债券，现在的交易价格为 $B(6,\ 12)=0.936\ 8$ 美元。计算隐含的利率，并计算每个时间持有债券的数量。计算一整年投资的对数收益率。

练习 10.3

假设 $B(0,\ 12)=0.870\ 0$ 美元，如果投资 6 个月零息债券的对数收益率为 14%，那么 6 个月之后的利率是多少？

练习 10.4

在本练习中，我们取 $\tau=\frac{1}{360}$（这里假设 1 年为 360 天），让时间刻度更精细些。假设 $B(0,\ 360)=0.920\ 0$ 美元；利率在初始 6 个月保持不变，在第 180 天时上升 200 个基点，并以此水平一直保持到年末。如果一只债券在年初购买，在哪一天出售会得到 4.88%的对数收益率或者更多？

219

在附息债券上的投资更复杂，即使债券被持有至到期日，因为在此期间支付息票而且利息可以再投资。这种投资的收益率依赖于息票支付时的现行贴现率。首先考虑相对简单的情况，即投资在第一次息票支付时立刻终止。

例 10.2

我们投资 1 000 美元于面值 100 美元、年息票 10 美元的 4 年期债

券。这种附息债券可以看做 4 个零息债券的组合，其到期日分别在 1，2，3，4 年之后，面值分别为 10 美元，10 美元，10 美元，110 美元。假设这种附息债券价格为 91.78 美元，这可以表示为下面 4 个零息债券价值之和，即

$$91.78=10e^{-y(0)}+10e^{-2y(0)}+10e^{-3y(0)}+110e^{-4y(0)}$$

（这里的时段长度 $\tau=1$。）求解该方程可得到收益率 $y(0)\cong 12\%$。我们可以购买 10.896 份该附息债券。在 1 年后，把息票变现可得 108.96 美元，并出售债券，这时债券变为 3 年期的附息债券。考虑下面 3 种状况：

1. 1 年后利率保持不变，即 $y(1)=12\%$，附息债券价值为

$$10e^{-0.12}+10e^{-2\times 0.12}+110e^{-3\times 0.12}\cong 93.48\text{（美元）}$$

我们总共收到 108.96+1 018.52≅1 127.48 美元。

2. 1 年后利率减少到 10%，结果附息债券价值为

$$10e^{-0.1}+10e^{-2\times 0.1}+110e^{-3\times 0.1}\cong 98.73\text{（美元）}$$

可以获得 1 184.63 美元。

3. 1 年后利率增加到 14%，债券的交易价格为 88.53 美元，投资的最终价值为 1 073.51 美元。

练习 10.5

计算收益率 $y(1)$，使得在例 10.2 中投资的对数收益率为：(a) 12%；(b) 10%；(c) 14%。

220

如果投资期限超过 1 年，我们将遇到息票的再投资问题。在例 10.3 中我们假设息票都用来购买同一债券。

例 10.3

我们重新分析例 10.2，但是这里我们所关心的是在 3 年后终止投资的情形。在 1 年之后，我们将息票再投资于同样的 3 年期的附息债券。考虑 1 年之后的如下状况：

1. 利率在投资期限内保持相同，即 $y(0)=y(1)=y(2)=y(3)=12\%$。债券价格为 93.48 美元，于是收到 108.96 美元的息票可以购买 1.17 份债券，持有的债券总数量增加到 12.06 份。我们可以简单地用债券现价乘以所持有的债券数追踪投资价值。在下一年我们同样使用这种运算。3 年之后，我们变现息票并出售债券，最终投资价值为 1 433.33 美元。该值可以作为其他状况的标准，注意

$$1\,433.33\cong 1\,000e^{3\times 12\%}$$

等于用 1 000 美元投资于零息债券 3 年后的价值。我们把一系列投资总结在下表中。

年	0	1	2	3
利率（%）	12	12	12	12
息票 1 的现值（美元）	8.87	10.00		
息票 2 的现值（美元）	7.87	8.87	10.00	
息票 3 的现值（美元）	6.98	7.87	8.87	10.00
息票 4 的现值（美元）	6.19	6.98	7.87	8.87
面值的现值（美元）	61.88	69.77	78.66	88.69
债券价格（美元）	91.78	93.48	95.40	97.56
息票变现（美元）		108.96	120.60	133.26
额外的债券		1.17	1.26	
债券总数	10.90	12.06	13.33	
投资价值（美元）	1 000.00	1 127.50	1 271.25	1 433.33

2. 假设 1 年之后利率下降 2%，然后保持在新的水平。利率的下降将导致债券价格上升，由息票购买的债券数量比状况 1 少。无论怎样，投资的最终价值会更高，因为 3 年以后卖出债券的价格更高，如下表所示。

221

年	0	1	2	3
利率（%）	12	10	10	10
息票 1 的现值（美元）	8.87	10.00		
息票 2 的现值（美元）	7.87	9.05	10.00	
息票 3 的现值（美元）	6.98	8.19	9.05	10.00
息票 4 的现值（美元）	6.19	7.41	8.19	9.05
面值的现值（美元）	61.88	74.08	81.87	90.48
债券价格（美元）	91.78	98.73	99.11	99.53
息票变现（美元）		108.96	119.99	132.10
额外的债券		1.10	1.21	
债券总数	10.90	12.00	13.21	
投资价值（美元）	1 000.00	1 184.65	1 309.25	1 446.94

3. 如果利率增加到 14% 并保持不变，债券价格比状况 1 低，投资的最终价值将会变少，如下表所示。

年	0	1	2	3
利率（%）	12	14	14	14
息票 1 的现值（美元）	8.87	10.00		

续前表

年	0	1	2	3
息票 2 的现值（美元）	7.87	8.69	10.00	
息票 3 的现值（美元）	6.98	7.56	8.69	10.00
息票 4 的现值（美元）	6.19	6.57	7.56	8.69
面值的现值（美元）	61.88	65.70	75.58	86.94
债券价格（美元）	91.78	88.53	91.83	95.63
息票现金（美元）		108.96	121.26	134.46
额外的债券		1.23	1.32	
债券总数	10.90	12.13	13.45	
投资价值（美元）	1 000.00	1 073.53	1 234.85	1 420.41

下面，考虑与上面的投资具有同样可能状况的投资，但是附息债券的息票为 32 美元，每年支付一次，所有其他变量保持不变。结果如下：

状况	3 年后的价值（美元）
12%，12%，12%，12%	1 433.33
12%，10%，10%，10%	1 433.68
12%，14%，14%，14%	1 433.78

值得注意的是，利率的变化会引起投资价值的变化。当利率发生不利变化时，我们不会发生损失；而在其他的情况下，我们也没有收益。这可用如下事实解释：在 10.1.2 节中定义的称为**久期**（duration）的债券的参数恰好等于投资期。在某种意义上说，债券的性质近似于指定到期日的零息债券。

222

练习 10.6

验证上表给出的数据。

练习 10.7

1 000 美元投资于面值 100 美元、年息票 32 美元的 4 年期的债券，计算 3 年后的价值。如果各年的利率为

状况 1：12%，11%，12%，12%

状况 2：12%，13%，12%，13%

设计表格，并用各种利率尝试。

10.1.2 久期

我们已经论述过，可变利率会导致债券未来价值的不确定性，这对于一个年金的管理者而言，也许是一个困扰，甚至是不可接受的。在本节中，我们介绍一个工具使得对这种投资的免疫成为可能，至少在本节考虑的收益率独立于到期日的特殊状况是这样。

为简化符号，假设 y 为当前收益率 $y(0)$。考虑一个附息债券，其息票为 C_1，C_2，…，C_N，在时间为 $0<\tau n_1<\tau n_2<\cdots<\tau n_N$ 支付，并且面值为 F，到期日为 τn_N。债券的当前价格为

$$P(y)=C_1\mathrm{e}^{-\tau n_1 y}+C_2\mathrm{e}^{-\tau n_2 y}+\cdots+(C_N+F)\mathrm{e}^{-\tau n_N y} \tag{10.1}$$

债券的久期定义为

$$D(y)=\frac{\tau n_1 C_1\mathrm{e}^{-\tau n_1 y}+\tau n_2 C_2\mathrm{e}^{-\tau n_2 y}+\cdots+\tau n_N(C_N+F)\mathrm{e}^{-\tau n_N y}}{P(y)} \tag{10.2}$$

$C_1\mathrm{e}^{-\tau n_1 y}/P(y)$，$C_2\mathrm{e}^{-\tau n_2 y}/P(y)$，…，$(C_N+F)\mathrm{e}^{-\tau n_N y}/P(y)$是非负的，其和为 1，于是可以把它们视为权重或者概率。可以这样说，久期是未来支付时间的加权平均。任何未来现金流的久期都可以用类似的方式定义。

223

久期测度了债券价格对利率变化的敏感性，为了看清这一点，我们计算债券价格对 y 的导数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(y)=-\tau n_1 C_1\mathrm{e}^{-\tau n_1 y}-\tau n_2 C_2\mathrm{e}^{-\tau n_2 y}-\cdots-\tau n_N(C_N+F)\mathrm{e}^{-\tau n_N y}$$

于是有，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(y)=-D(y)P(y)$$

上式有时可以作为久期的定义。

例 10.4

一个 6 年期的附息债券，面值为 100 美元，每年息票为 10 美元，收益率为 6%，该债券的久期为 4.898 年。一个 6 年期的具有相同的息票和收益率，但其面值为 500 美元的附息债券，其久期将是 5.671 年。任何零息债券的久期都等于投资期。

练习 10.8

一个 2 年期的附息债券，面值为 100 美元，每季度支付息票 6

美元，收益率为 11%，计算这个债券的久期。

练习 10.9

假设一个 5 年期，债券收益率为 10%，年息票 10 美元的附息债券的久期为 4 年，债券的面值是多少？在息票不超过面值的情况下，通过改变面值解出久期的范围。如果面值是固定的，比如说为 100 美元，对久期为 4 年的附息债券计算息票水平。以这种方法计算的久期能够说明什么问题？

练习 10.10

证明 P 是 y 的凸函数。

如果我们投资债券，打算在时间 t 终止，那么投资于单个债券的货币的终值是 $P(y)e^{ty}$（如果利率保持不变，等于初始利率 $y(0)$）。为了看清楚这笔金额对利率变化的敏感性，下面计算其对 y 的导数，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(P(y)e^{ty}) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(y)\right)e^{ty} + tP(y)e^{ty} = (t - D(y))P(y)e^{ty}$$

224 如果债券的久期恰好是 t，那么

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(P(y)e^{ty}) = 0$$

如果在某点导数是零，那么函数图像在该点附近是“平坦的”（flat），这意味着利率的微小变化对投资的未来价值几乎没有影响。

10.1.3 债券资产组合

如果一个债券的久期不能令人满意，那么可以利用投资于具有不同久期的合适的**债券资产组合**（portfolio of bonds）构造一个综合债券。

例 10.5

如果初始利率为 14%，那么年息票 $C=10$ 美元，面值 $F=100$ 美元的 4 年期附息债券的久期为 3.44 年。面值 $F=100$ 美元，期限 $N=1$ 年的零息债券的久期是 1 年。包括上述两种债券的债券组合可以视为单一债券，其息票 $C_1=110$ 美元，$C_2=C_3=C_4=10$ 美元，$F=100$ 美元。它的久期可以用公式（10.2）算出，其久期是 2.21 年。

我们将借助每一个债券的久期推导债券资产组合的久期公式。用

$P_A(y)$ 和 $P_B(y)$ 表示久期为 $D_A(y)$ 和 $D_B(y)$ 的债券 A 和 B 的价格，取 a 份债券 A 和 b 份债券 B 构成的资产组合，其价值是 $aP_A(y)+bP_B(y)$。计算该资产组合的久期可分为两步：

1. 计算由 a 份债券 A 构成的资产组合的久期，此资产组合记为 aA，其价格为 $aP_A(y)$。因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(aP_A(y))=-D_A(y)(aP_A(y))$$

于是有

$$D_{aA}(y)=D_A(y)$$

如果我们考察 aA 的现金流，这是显然的，因为每一个息票和面值都乘以 a 再利用公式（10.2）计算久期时会相互抵消。

2. 计算 1 份债券 A 和 1 份债券 B 构成的资产组合的久期，该资产组合记为 $A+B$，组合的价格为 $P_A(y)+P_B(y)$。

225

对上面最后一个表达式取微分，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(P_A(y)+P_B(y))&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P_A(y)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P_B(y)\\&=-D_A(y)P_A(y)-D_B(y)P_B(y)\end{aligned}$$

如果我们取

$$D_{A+B}(y)=D_A(y)\frac{P_A(y)}{P_A(y)+P_B(y)}+D_B(y)\frac{P_B(y)}{P_A(y)+P_B(y)}$$

那么上面最后一式可以改写为 $-D_{A+B}(y)(P_A(y)+P_B(y))$。这意味着 $D_{A+B}(y)$ 为 $D_A(y)$ 和 $D_B(y)$ 的线性组合，系数为投资组合中每只债券的价格百分比权重。

由上面的分析我们可以得到一般的公式：

$$D_{aA+bB}(y)=D_A(y)w_A+D_B(y)w_B$$

其中，

$$w_A=\frac{aP_A(y)}{aP_A(y)+bP_B(y)},\ w_B=\frac{bP_A(y)}{aP_A(y)+bP_B(y)}$$

是每一个债券价值的权重百分比。

如果我们允许 a 或 b 的值为负（相当于卖出债券而不是购买，换句话说，借钱而不是投资），那么，给定两个久期 $D_A\neq D_B$，资产组合的久期 D 能够取任何值，因为 $w_B=1-w_A$ 且

$$D=D_Aw_A+D_B(1-w_A)=D_B+w_A(D_A-D_B)$$

以至于 D 值甚至可以为负，这相当于负的现金流，即支付货币而不是收

到货币。

例 10.6

令 $D_A=1$，$D_B=3$，我们想将 1 000 美元投资 6 个月。为了使久期与投资期限相匹配，必有 $0.5=w_A+3w_B$。因为 $w_A+w_B=1$，由此可以得出 $w_B=-0.25$，$w_A=1.25$。其中，$P_A=0.92$ 美元，$P_B=1.01$ 美元，我们投资 1 250 美元于$\frac{1\,250}{0.92}\cong 1\,358.70$ 份债券 A，并发行$\frac{250}{1.01}\cong 247.52$ 份债券 B。

练习 10.11

如果 $D_A=2$，$D_B=3.4$，$P_A=0.98$，$P_B=1.02$，并且你需要一个价值为 5 000 美元，久期为 6 年的资产组合，计算购买的债券 A 和债券 B 的数量。

226

练习 10.12 *

投资 1 000 美元于一个久期为 2 年的债券资产组合。该资产组合由 1 年期、面值为 100 美元的零息债券和面值为 100 美元、年息票为 15 美元的 4 年期债券组合而成，交易价格为 102 美元。计算投资于债券 A 和债券 B 的金额。

久期与投资期限相匹配的债券组合对利率的微小变化不敏感，但是在实践中我们必须调整资产组合——例如，如果投资期是 3 年，且其中某个债券是一个 1 年后到期的零息债券。此外，正如下面我们将要看到的，久期可能会发生变化而偏离要求，因此我们有必要在投资期内更新资产组合，这就是我们接下来将讨论的主题。

10.1.4 动态套期保值

即使所选择的投资组合的久期与投资期限相匹配，但这也仅在初始的瞬时成立，因为久期会随着时间和利率发生变化。

例 10.7

取一个 5 年期，年息票为 10 美元，面值为 100 美元的附息债券。如果 $y=10\%$，那么久期将会是 4.16 年。在第 1 次息票被支付之前，久期

* 练习 10.12 中的最后一句话是译者根据习题 10.12 解答所作的补充。——译者注

会随着时间逐渐减小：6 个月后为 3.66 年；9 个月后为 4.16－0.75＝3.31 年。如果久期与投资期限匹配且利率不变，则在息票被支付前不需要调整。一年之后，一旦第一个息票被支付，该债券将会变为期限为 4 年，久期为 3.48 年的债券，不再与投资期限相一致。

练习 10.13

假设利率不变，在第一个息票被支付之前，证明时间 t 之后债券的久期为 $D-t$，其中 D 为债券在时间 0 的久期。

下面的例子说明了利率变化对久期的影响。

227

例 10.8

假设例 10.7 中的债券的 $y=6\%$，则久期为 4.23 年；如果 $y=14\%$，则久期为 4.08 年。

练习 10.14

证明 2 年期，按年支付息票债券的久期会随利率的增加而减少。

现在利用久期设计一个对利率变化免疫的投资策略，可以通过监测每年末的头寸做到这一点，如果有必要可以更频繁地监测。为了清楚地阐述，我们举一个例子。

假设投资期限为 3 年；目标价值为 100 000 美元；初始利率为 12%。如果利率保持不变，我们投资的 69 767.63 美元的现值为 100 000 美元。

我们通过两个工具来控制目标，一个是年息票为 10 美元，面值为 100 美元的 5 年期债券 A；另一个是具有相同面值的 1 年期零息债券 B。我们假设 B 类型的新债券是可获得的，在接下来几年里，我们将它和债券 A 结合。

在时间 0，债券价格分别为 90.27 美元和 88.69 美元，我们可以计算出 $D_A \cong 4.12$，权重 $w_A \cong 0.6405$ 和 $w_B \cong 0.3595$ 所构造的资产组合的久期是 3。根据该权重分配初始总资金，用 44 687.93 美元购买 $a \cong 495.05$ 份债券 A，用 25 079.70 美元购买 $b \cong 282.77$ 份债券 B。下面考虑将来利率变化出现的各种状况。

1. 1 年之后利率增加到 14%，则资产组合的价值为下面三项的总和：

- 债券 A 的第一个息票：4 950.51 美元；
- 变现债券 B 的面值：28 277.29 美元；
- 持有的债券 A 的市场价值：现在是 4 年期的债券，销售价为 85.65 美元，价值为 42 403.53 美元。

总价值为 75 631.32 美元。债券 A 的久期为 3.44 年。目标久期为 2 年，所以我们得到 $w_A \cong 0.4094$，$w_B \cong 0.5906$，组合中持有 361.53 份债券 A 和 513.76 份债券 B（这意味着，我们必须卖出 133.52 份债券 A，购入 513.76 份新债券 B）。

(a) 2 年之后，利率降到 9%。为计算我们的财富，可以将下面三项加总：

228

- 债券 A 的息票：3 615.30 美元；
- 债券 B 的面值：51 376.39 美元；
- 债券 A 的市场价值，销售价 101.46 美元：36 682.22 美元。

我们的财富总额为 91 673.92 美元。我们将所有的资金投资于债券 B，因为目标久期为 1 年。（这些债券在下一年肯定会被支付。）我们可以购买 1 003.07 份销售价为 91.39 美元的债券 B，最终的投资价值将为 **100 307** 美元。

(b) 2 年之后，利率增加为 16%。我们可以变现和上面数量相等的息票和零息债券。但是债券 A 现在更加便宜了，销售价为 83.85 美元，所以我们得到的资金较少，为 85 305.68 美元。然而，零息债券现在也更便宜了，售价为 85.21 美元，可以购买 1 001.07 份债券，到期时总额为 **100 107** 美元。

2. 1 年之后的利率降到 9%。用和上面类似的方法，通过加总债券 A 的息票、债券 B 的面值和债券 A 的市场价值，我们得到投资的当前价值为 83 658.73 美元。于是，我们计算出投资两种债券的权重分别为 $w_A \cong 0.4013$，$w_B \cong 0.5987$；然后，确定新的资产组合由 329.56 份债券 A 和 548.04 份债券 B 组成（即我们必须卖出 165.50 份债券 A，买入 548.04 份新债券 B）。

(a) 2 年之后，利率上升为 14%。变现债券 A 的息票可以得到 3 295.55 美元，与变现债券 B 所得的 54 803.77 美元相加，再加上债券 A 的市场价值 29 174.39 美元，共计 87 273.72 美元。可以购买 1 003.89 份新零息债券 B，3 年之后的总价值为 **100 389** 美元。

(b) 2 年之后利率下降为 6%。我们的财富应为 94 405.29 美元，可以购买 1 002.43 份债券 B，投资的最终价值为 **100 243** 美元。

正如我们所见，每种状况的最终价值都超过了 100 000 美元。[1]

练习 10.15

设计一个总额为 20 000 美元的资产组合，资产组合的久期是 2，并包含两种 2 年后到期的附息债券。其中之一是面值为 100 美元，年息票为 20 美元的债券 A；另一个是面值为 500 美元，年息票为 5 美元的债券 B。给定的初始利率为 8%。2 年后，这个投资的价值是多少？

10.2 一般的期限结构

229

在本节中，我们将讨论没有收益率独立于到期日条件的债券定价模型。

具有可变到期日的零息单位债券的价格 $B(n, N)$ 决定的一组收益率 $y(n, N)$ 由下式给出：

$$B(n, N)=\mathrm{e}^{-(N-n)\tau y(n, N)}$$

注意，收益率必须是正的，因为当 $n<N$ 时，$B(n, N)$ 必须小于 1。两变量 $n<N$ 的函数 $y(n, N)$ 被称为**利率的期限结构**。由当前价格所决定的收益率 $y(0, N)$ 称为**即期利率**。

由即期利率 $y(0, N)$ 形成的初始期限结构仅仅是单变量 N 的函数。一般地，它是一个增函数，但是在金融市场中，其他类型的图形也可以遇到。特别地，初始期限结构也可能是平坦的，也就是说，收益率与 N 无关，前面几节可以看做是这种情况。

练习 10.16

如果 $B(0, 6)=0.96$ 美元，计算 $B(0, 3)$ 和 $B(0, 9)$，使得初始期限结构为平坦的。

作为未来支付现值的附息债券价格可以用即期利率写成如下形式：

$$P=C_1\mathrm{e}^{-\tau n_1 y(0,n_1)}+C_2\mathrm{e}^{-\tau n_2 y(0,n_2)}+\cdots+(C_N+F)\mathrm{e}^{-\tau n_N y(0,n_N)} \tag{10.3}$$

如果债券的息票 C_1，C_2，…，C_N 在时间 $0<\tau n_1<\tau n_2<\cdots<\tau n_N$ 支付，面值为 F，到期日为 τn_N。

虽然对于附息债券我们不能用单独 1 个利率对未来支付进行折现，但是可以人为引入一个数当作利率。这个利率被称为到期收益率，定义为下面方程的解 y，即

$$P=C_1\mathrm{e}^{-\tau n_1 y}+C_2\mathrm{e}^{-\tau n_2 y}+\cdots+(F+C_N)\mathrm{e}^{-\tau n_N y}$$

到期收益率可以简单方便地描述附息债券，所以被财经报道引用。当然，如果利率与到期日无关，那么上式与式（10.1）相同。

230

注 10.1

为了确定初始利率期限结构，我们需要知道零息债券的价格，然而

由于到期期限较长时（一般地超过 1 年）一般仅可交易附息债券，以至于有必要将附息债券分解成各种到期日的零息债券。在给定债券价格和较短到期日的收益率条件下，可以应用式（10.3）得到较长到期日的收益率。美国财政部 1985 年介绍过该程序，称为**剥离技术**（Separate Trading of Registered Interest and Principal Securities，STRIPS，即单独买卖注册利息和本金证券），允许投资者通过回售余下的债券（即被剥离的债券）给财政部，以保证要求的现金支付（对特定债券）。

例 10.9

假设 1 年期，面值为 100 美元的零息债券的交易价格为 91.80 美元；息票为 10 美元，面值为 100 美元的 2 年期债券的交易价格为 103.95 美元。我们由此可得到如下收益率的方程

$$91.80 = 100e^{-y(0,1)}$$
$$103.95 = 10e^{-y(0,1)} + 110e^{-2y(0,2)}$$

从第一个方程我们得到 $y(0, 1) \cong 8.56\%$，将该值代入第二个方程，就可以计算出 $y(0, 2) \cong 7.45\%$。因此，被剥离的 2 年期债券的价格——即 2 年后到期、面值为 100 美元的零息债券价格为 $100e^{-2y(0,2)} \cong 86.16$ 美元。给定 3 年期的附息债券的价格后，我们就能够估算出 $y(0, 3)$，以此类推。

回到一般债券的研究，我们考虑一个具有确定性期限结构（因此预先已知，有确定性）的债券。但命题 10.2 指出，事实上，这不符合实际。

命题 10.2

如果期限结构是确定的，那么无套利原理隐含

$$B(0, N) = B(0, n)B(n, N) \tag{10.4}$$

证明

如果 $B(0, N) < B(0, n)B(n, N)$，那么

231

- 购买 1 份到期日为 N 的债券，卖出 $B(n, N)$ 份到期日为 n 的债券（这里我们假设债券的未来价格在今天是已知的）。这样现在可以得到 $B(0, n)B(n, N) - B(0, N)$ 美元。
- 在时间 n，结算卖出的债券，通过发行 1 份到期日为 N 的零息债券可以得到所需金额 $B(n, N)$。
- 在时间 N，结算头寸，获得初始的利润。

相反的不等式 $B(0, N) > B(0, n)B(n, N)$，可以通过采取相反的策略，用类似的方法证明。 □

借助于收益率可以将价格表示为

$$B(n, N)=\frac{B(0, N)}{B(0, n)}=e^{\tau n y(0, n)-\tau N y(0, N)}$$

这意味着，所有债券的价格（于是整个期限结构）可以由初始期限结构确定。然而，显然我们不可能期望用此法控制现实的债券市场，特别地，这个关系式并不被历史数据支持。

这表明，假设债券价格是确定的是对模型的过分简化。除了承认未来期限结构是随机的以外，我们别无选择，因为仅仅初始的期限结构是已知的，确定的。在随后的章节中，我们将假设未来债券的价格是随机的，由这些价格确定的量也是随机的。

10.2.1 远期利率

我们首先举一个例子说明怎样预先确定未来时间的存款利率和贷款利率。

例 10.10

假设你公司的商业计划规定一年以后要取得一笔 100 000 美元的贷款购买新设备；你希望在另一个 1 年后偿还贷款；你愿意在今天以固定利率偿还贷款，而不愿意冒险用未来利率偿还。假设即期利率 $y(0, 1)=8\%$，$y(0, 2)=9\%$（其中 $\tau=1$）。你购买 1 000 份面值为 100 美元的 1 年期债券，支付 $100\ 000e^{-8\%}\cong 92\ 311.63$ 美元。这笔资金是以利率 9% 借入的 2 年期贷款。1 年后，你卖出债券可以得到 100 000 美元；2 年后你归还贷款和利息，其总额为 $92\ 311.63e^{2\times 9\%}\cong 110\ 517.09$ 美元。因而，你构想的贷款的利率为 $\ln\frac{110\ 517.09}{100\ 000}\cong 10\%$。金融中介机构可以利用发行所谓的远期利率协议来简化你的工作，并且完善你构想的贷款结构。

232

练习 10.17

解释怎样从第 6 个月开始安排 6 个月的 500 美元存款。如果 $y(0, 6)=6\%$，$y(0, 12)=7\%$，计算贷款利率，这里 $\tau=\frac{1}{12}$。

一般来说，初始远期利率 $f(0, M, N)$ 是使得

$$B(0, N)=B(0, M)e^{-(N-M)\tau f(0, M, N)}$$

的利率，于是有

$$f(0, M, N) = -\frac{1}{\tau(N-M)}\ln\frac{B(0, N)}{B(0, M)}$$
$$= -\frac{\ln B(0, N) - \ln B(0, M)}{\tau(N-M)}$$

注意，这个利率是确定的，因为它是用现在的债券价格计算出来的。借助于初始期限结构很容易将它计算出。我们将由利率确定的价格 $B(0, N) = e^{-\tau N y(0, N)}$，$B(0, M) = e^{-\tau M y(0, M)}$ 代入上面的表达式，于是有

$$f(0, M, N) = \frac{Ny(0, N) - My(0, M)}{N-M} \tag{10.5}$$

练习 10.18

假设表中的现期利率是由伦敦中部银行提供的（伦敦银行同业拆借利率（London Interbank Offer Rate，LIBOR）为存款利率；伦敦银行同业借入利率（London Interbank Bid Rate，LIBID）为贷款利率）：

利率	LIBOR	LIBID
1 个月	8.41%	8.59%
2 个月	8.44%	8.64%
3 个月	9.01%	9.23%
6 个月	9.35%	9.54%

作为一名银行经理，当一名客户希望在 1 个月后贷款 100 000 元，5 个月后还清，你能提供怎样的利率，怎样构造贷款？假设另一个机构在 2 个月后可提供 4 个月的存款，利率为 10.23%。这可以提供套利机会吗？在这个练习中，所有利率都是连续复合利率。

随着时间的推移，债券的价格将发生变化，由时间 $n < M < N$ 确定的区间 $[M, N]$ 上的远期利率由下式定义

$$B(n, N) = B(n, M)e^{-(N-M)\tau f(n, M, N)}$$

即

$$f(n, M, N) = -\frac{\ln B(n, N) - \ln B(n, M)}{(N-M)\tau}$$

瞬时远期利率 $f(n, N) = f(n, N, N+1)$ 是单位区间上的远期利率。一般说来，当 τ 为 1 天时，这个瞬时远期利率为隔夜存贷款利率。这个远

期利率公式

$$f(n, N)=-\frac{\ln B(n, N+1)-\ln B(n, N)}{\tau} \tag{10.6}$$

使得我们能够重新构建债券价格，如果给定特定时间 n 的远期利率。

例 10.11

令 $\tau=\frac{1}{12}$，$n=0$，$N=0$，1，2，3，假设债券价格为

$$B(0, 1)=0.990\,1$$
$$B(0, 2)=0.982\,8$$
$$B(0, 3)=0.972\,6$$

则我们可以得到下面的隐含收益率：

$$y(0, 1)\cong 11.94\%$$
$$y(0, 2)\cong 10.41\%$$
$$y(0, 3)\cong 11.11\%$$

和远期利率：

$$f(0, 0)\cong 11.94\%$$
$$f(0, 1)\cong 8.88\%$$
$$f(0, 2)\cong 12.52\%$$

注意，使用远期利率公式，我们有

$$\exp\left(-\frac{0.119\,4+0.088\,8+0.125\,2}{12}\right)\cong 0.972\,6=B(0, 3)$$

这是下面命题 10.3 的一个例子。

234

命题 10.3

债券价格为

$$B(n, N)=\exp\{-\tau(f(n, n)+f(n, n+1)+\cdots+f(n, N-1))\}$$

证明

为此，注意，因为 $B(n, n)=1$，所以

$$f(n, n)=-\frac{\ln B(n, n+1)}{\tau}$$

于是有

$$B(n, n+1)=\exp\{-\tau f(n, n)\}$$

接下来，

$$f(n, n+1) = -\frac{\ln B(n, n+2) - \ln B(n, n+1)}{\tau}$$

代入 $B(n, n+1)$ 的表达式，有

$$B(n, n+2) = \exp\{-\tau(f(n, n) + f(n, n+1))\}$$

多次重复，我们就可以推导出一般公式。 □

我们利用收益率可以推导出远期利率的简单表达式：

$$f(n, N) = (N+1-n)y(n, N+1) - (N-n)y(n, N) \quad (10.7)$$

特别地，

$$f(n, n) = y(n, n+1)$$

于是就可以得到直观的公式：

$$y(n, N) = \frac{f(n, n) + f(n, n+1) + \cdots + f(n, N-1)}{N-n}$$

例 10.12

从上面的公式我们可以清楚地看到，如果期限结构是平坦的，也就是说，$y(n, N)$ 与 N 无关，那么 $f(n, N) = y(n, N)$。现在考虑 $f(n, N)$ 随 N 增加的例子，即

$$f(0, 0) = 8.01\%, \quad y(0, 1) = 8.01\%$$
$$f(0, 1) = 8.03\%, \quad y(0, 2) = 8.02\%$$
$$f(0, 2) = 8.08\%, \quad y(0, 3) = 8.04\%$$

并计算相应的收益率。

235

我们可以看到，收益率也增加了（练习 10.20 是对这个问题的一般化）。

然而，即使收益率随到期日增加，远期利率也不一定会增加，

$$f(0, 0) = 9.20\%, \quad y(0, 1) = 9.20\%$$
$$f(0, 1) = 9.80\%, \quad y(0, 2) = 9.50\%$$
$$f(0, 2) = 9.56\%, \quad y(0, 3) \cong 9.52\%$$

练习 10.19

远期利率可以是负的吗?

练习 10.20

证明如果 $f(n, N)$ 随着 N 的增加而增加，那么 $y(n, N)$ 也会随着 N 的增加而增加。

10.2.2 货币市场账户

我们将**短期利率**定义为 $r(n)=f(n, n)$。它的另一个表达式为 $r(n)=y(n,n+1)$，于是这是在时间 n 开始的一个时间段有效的利率。短期利率是预先未知的，但当前利率 $r(0)$ 除外。区分 $r(n)$ 与 $f(0, n)$ 很重要，因为两个利率都应用于从时间 n 到时间 $n+1$ 的单个时段，但前者是随机的，而后者在目前时间是已知的并且被初始期限结构所确定。

货币市场账户 $A(n)$，这里 $n\geqslant 1$，定义为

$$A(n)=\exp\{\tau(r(0)+r(1)+\cdots+r(n-1))\}$$

式中，$A(0)=1$；$A(n)$ 为投资 1 美元按短期利率连续复合产生的利息在时间 n 的价值。例如，如果 $\tau=\frac{1}{365}$，那么利息由隔夜利率给定。

我们在第 2 章定义的货币市场账户是确定性的，且独立于初始美元的特定投资方式。而本节中的 $A(n)$ 是随机的，正如下面将要看到的，一般来说，与 $\exp\{\tau n y(0, n)\}$不同，后者是确定的，且可用到期日为 n 的零息债券构造。

例 10.13

236

在练习 10.11 的情况下，假设价格变化如下：

$$B(0, 1)=0.9901,$$
$$B(0, 2)=0.9828, \quad B(1, 2)=0.9947,$$
$$B(0, 3)=0.9726, \quad B(1, 3)=0.9848, \quad B(2, 3)=0.9905$$

相应的收益率为

$$y(0, 1)\cong 11.94\%,$$
$$y(0, 2)\cong 10.41\%, \quad y(1, 2)\cong 6.38\%,$$
$$y(0, 3)\cong 11.11\%, \quad y(1, 3)\cong 9.19\%, \quad y(2, 3)\cong 11.45\%$$

远期利率为

$$f(0, 0)\cong 11.49\%,$$
$$f(0, 1)\cong 8.88\%, \quad f(1, 1)\cong 6.38\%,$$
$$f(0, 2)\cong 12.52\%, \quad f(1, 2)\cong 12.00\%, \quad f(2, 2)\cong 11.45\%$$

我们可以计算出短期利率，并计算出货币市场账户的价值

$$A(0)=1$$
$$r(0)=f(0, 0)\cong 11.94\%, A(1)\cong 1.0100$$

$r(1)=f(1, 1)\cong 6.38\%$, $A(2)\cong 1.015\,4$

$r(2)=f(2, 2)\cong 11.45\%$, $A(3)\cong 1.025\,1$

练习 10.21

在例 10.13 中，哪个债券价格变化后，货币市场账户的价值不改变?

练习 10.22

利用例 10.13 中的数据，在下面的状况下，计算从时间 0 到时间 3 的投资的对数收益率：(a) 在时间 3 到期的零息债券；(b) 单期零息债券；(c) 货币市场账户价值。

【注释】

[1] 可以证明，如果收益率 y 保持不变，久期等于 t 的债券投资在时间 t 的未来值最小。这意味着，在收益率独立于到期日的模型中，利率的跳跃会导致套利出现。因此，在利率跳跃的无套利模型中，收益率依赖于到期日。

第 11 章　随机利率

237

在本章中，我们将论述随时间演变的随机利率的建模问题。我们采用与第 3 章股票二叉树模型类似的方法。利率演变的建模方法可以简化债券价格演变的建模方法，因为后者决定前者。我们从债券价格模型应具有的一些性质开始，着重研究债券与股票的差别。

第一，让我们回顾债券价格或利率的演变可以用两个变量即运行时间和到期时间来描述；而股票价格仅为一个变量即运行时间的函数。

第二，存在很多描述期限结构的方法：债券价格、隐含的收益率、远期利率和短期利率。债券价格与收益率显然是等价的，可用简单的公式联系在一起。债券价格与远期利率也是等价的。短期利率与其他方法不同，它比较容易处理，但会出现重新构造利率期限结构的问题。所以，这并不简单，因为短期利率带来的信息通常很少。

第三，模型需要符合初始数据。对于股票仅是当前价格。在债券的情况下，给出完整的初始的期限结构，需要对模型附加更多的限制，这些限制必须与所有的当前可利用的市场信息一致。

第四，在到期日，债券会变成非随机的，这与股票价格相反。在到期时，债券给出确定的值这个事实必须包含在模型中。

第五，收益率对到期时间的依赖性是有特点的，到期日相近的债券的运行模式也是类似的。利用统计学术语，这意味着它们是正相关的。

11.1 二叉树模型

238

本节中论述的树的形状与 3.2 节中论述的树的形状类似，然而因为这里的模型变得更复杂了，所以二叉树也相应地变得复杂。也就是，概率与收益取决于树中的位置。我们需要用适当的符号区分不同的位置。

状态的含义是有限个上涨和下跌的序列。首先状态依赖于时间，换言之，依赖于时段数。我们将使用各种长度的字母 u 和 d 的序列，长度对应于逝去的时间（从树的根部算起的时段数）。在时间 1，我们只有 2 个状态：s_1＝u 或 d；在时间 2，则有 4 个状态：s_2＝ud，dd，du，或 uu。我们用 $s_2=s_1$u 或 $s_2=s_1$d，表示在时间 1 已有的 s_1 的基础上，在时间 2 是上涨或是下跌。一般地，有 $s_{n+1}=s_n$u 或 $s_{n+1}=s_n$d。

概率依赖于特定的状态。我们记 $p(s_n)$ 为在时间 n 已有状态 s_n 的基础上，在时间 $n+1$ 上涨的概率。p 为第一个时段上涨的概率。在图 11—1 中，我们有 $p=0.3$，$p(\mathrm{u})=0.1$，$p(\mathrm{d})=0.4$，$p(\mathrm{uu})=0.4$，$p(\mathrm{ud})=0.2$，$p(\mathrm{du})=0.5$，$p(\mathrm{dd})=0.4$。

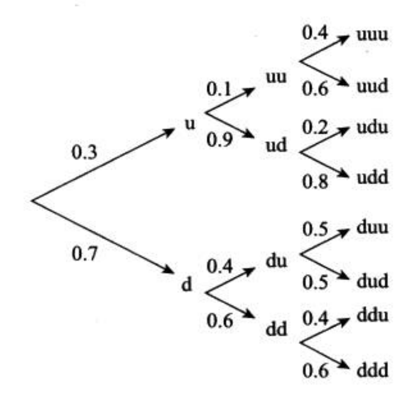


图 11—1 状态和概率

我们固定一个自然数 N 作为时间期界，这是所有考虑到的债券到期时间的上界。在时间 N 的状态 s_N 表示已完成了价格变动的所有状态。

239

下面我们将描述债券价格的演变。在时间 0，我们给出直到 N 的所有到期日的债券的初始价格，即 N 个数的序列：

$$B(0,1),B(0,2),B(0,3),\cdots,B(0,N-1),B(0,N)$$

在时间 1，价格 1 变为多余的，即第一个债券到期，只有 $N-1$ 个债券还在交易。我们根据状态 u 和 d，并在下面的两个分支中引入随机性，于是

我们可以得到两个序列：

$$B(1,2;\mathrm{u}),B(1,3;\mathrm{u}),\cdots,B(1,N-1;\mathrm{u}),B(1,N;\mathrm{u})$$
$$B(1,2;\mathrm{d}),B(1,3;\mathrm{d}),\cdots,B(1,N-1;\mathrm{d}),B(1,N;\mathrm{d})$$

在时间 2，我们有 4 个状态和 4 个长度为 $N-2$ 的序列：

$$B(2,3;\mathrm{uu}),\cdots,B(2,N-1;\mathrm{uu}),B(2,N;\mathrm{uu})$$
$$B(2,3;\mathrm{ud}),\cdots,B(2,N-1;\mathrm{ud}),B(2,N;\mathrm{ud})$$
$$B(2,3;\mathrm{du}),\cdots,B(2,N-1;\mathrm{du}),B(2,N;\mathrm{du})$$
$$B(2,3;\mathrm{dd}),\cdots,B(2,N-1;\mathrm{dd}),B(2,N;\mathrm{dd})$$

我们不要求 ud 和 du 的价格相等，价格相等是 3.2 节中针对股票价格变动的情形。

这个过程可以按同样的模式延续。在每一个时段，序列的长度减少 1，而序列的数量呈双倍增加。在时间 $N-1$，利用 s_{N-1}的所有状态作为指标，有 2^{N-1}序列，每一个序列只有单独的一个数，即

$$B(N-1,N;s_{N-1})$$

树结构只能细分到这里，因为最后的变动是确定的：最后到期的债券的价格在时间 N 会变成确定的数，即 $B(N,N,s_N)=1$ 对所有的状态成立。

例 11.1

$N=3$ 的债券价格的特殊演变$\left(\text{其时段为月}\left(\tau=\frac{1}{12}\right)\right)$如图 11—2 所示，图中显示了到期日为 1、2、3 的三个债券的价格。

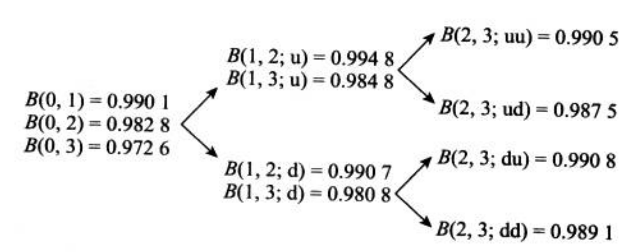


图 11—2　例 11.1 中的债券价格的演变

债券价格的演变也可以用收益率来描述。假设我们已经到达了状态 s_{N-1}，而且债券价格 $B(n-1,N;s_{n-1})$已知，可以写成：

$$B(n,N;s_{n-1}\mathrm{u})=B(n-1,N;s_{n-1})\exp\{k(n,N;s_{n-1}\mathrm{u})\}$$
$$B(n,N;s_{n-1}\mathrm{d})=B(n-1,N;s_{n-1})\exp\{k(n,N;s_{n-1}\mathrm{d})\}$$

240　我们将对数收益率隐含地定义为

$$k(n, N; s_{n-1}\mathrm{u}) = \ln \frac{B(n, N; s_{n-1}\mathrm{u})}{B(n-1, N; s_{n-1})}$$

$$k(n, N; s_{n-1}\mathrm{d}) = \ln \frac{B(n, N; s_{n-1}\mathrm{d})}{B(n-1, N; s_{n-1})}$$

且 $k(n, N; s_{n-1}\mathrm{u}) \geqslant k(n, N; s_{n-1}\mathrm{d})$。

注 11.1

注意，假设状态 s_{n-1} 是已知的，在树的某些位置，收益是非随机的，即

$$k(n, n; s_{n-1}\mathrm{u}) = k(n, n; s_{n-1}\mathrm{d}) = \ln \frac{1}{B(n-1, n; s_{n-1})}$$

因为 $B(n, n; s_n) = 1$ 对所有的 S_n 都成立。

例 11.2

利用例 11.1 的数据，我们取出到期日为 3 的债券价格，完成终值为 1 的图形。图 11—3 中的树显示出在时间 0 以 0.972 6 价格购买的债券价格的随机演变。收益率的计算是容易的，例如

241

$$k(2, 3; \mathrm{ud}) = \ln \frac{B(2, 3; \mathrm{ud})}{B(1, 3; \mathrm{u})} \cong 0.27\%$$

B(0, 3) = 0.972 6
B(1, 3; u) = 0.984 8
B(1, 3; d) = 0.980 8
B(2, 3; uu) = 0.990 5 ⟶ B(3, 3) = 1
B(2, 3; ud) = 0.987 5 ⟶ B(3, 3) = 1
B(2, 3; du) = 0.990 8 ⟶ B(3, 3) = 1
B(2, 3; dd) = 0.989 1 ⟶ B(3, 3) = 1

图 11—3　例 11.2 中在时间 3 到期的债券的价格

这些结果收集在图 11—4（每个时段的长度为 1 个月）中，即

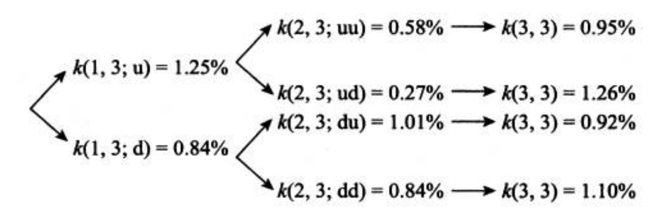


图 11—4　在例 11.2 中在时间 3 到期的债券的收益率

练习 11.1

对于图 11—5 所示的周收益树，构造债券价格树，并填满没有计算出的收益率。

$k(2, 3; uu) = 0.22\%$ → $k(3, 3) = 0.16\%$
$k(1, 3; u) = 0.26\%$
$k(2, 3; ud) = ?$ → $k(3, 3) = 0.18\%$
$k(2, 3; du) = 0.20\%$ → $k(3, 3) = 0.21\%$
$k(1, 3; d) = ?$
$k(2, 3; dd) = ?$ → $k(3, 3) = 0.25\%$

图 11—5　练习 11.1 的收益率

债券价格的演变与到期日的隐含收益率的演变完全一致，即

$$y(n,\ m;\ s_n)=\frac{1}{\tau(m-n)}\ln\frac{1}{B(n,\ m;\ s_n)}$$

与债券价格具有相同的树结构。特别地，假设倒数第二个时段的状态 s_{n-1} 是已知的，则最后的收益率就是非随机的。注意，这里的“上涨”和“下跌”失去了它们原来的含义，因为价格上涨时收益是下降的。不过，我们还是使用原来的标记 u 和 d。

242

例 11.3

我们继续研究例 11.1，并且计算出收益率。注意到 $\tau=\frac{1}{12}$。其结果如图 11—6 所示。

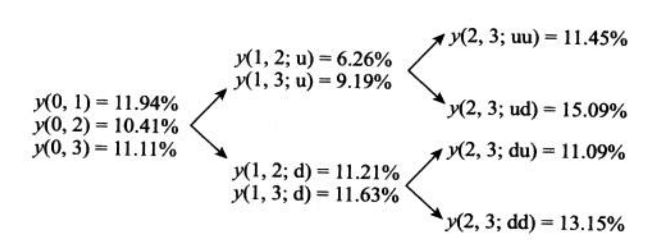


图 11—6　例 11.3 中的收益率

练习 11.2

按练习 11.1 中的收益率，计算收益率 $y(0,\ 3)$。收益率和到期日之间的关系是什么？不用计算债券的价格，你能计算出没有计算出的收益率吗？

现在考虑瞬时远期利率。在初始时间 0，存在 N 个远期利率

$$f(0,\ 0),\ f(0,\ 1),\ f(0,\ 2),\cdots,\ f(0,\ N-1)$$

它们是由初始债券价格形成的。注意，第一个数是短期利率 $r(0)=f(0,\ 0)$。对于接下来的时段，当前的股票价格隐含着远期利率。将式 (10.6) 应用于随机的债券价格，我们就可以计算出远期利率的随机演变：

$$f(n, N; s_n) = -\frac{\ln B(n, N+1; s_n) - \ln B(n, N; s_n)}{\tau} \qquad (11.1)$$

在时间 1，我们由债券价格序列可以得到 $N-1$ 个远期利率构成的两个可能的序列

$$f(1, 1; \mathrm{u}), f(1, 2; \mathrm{u}), \cdots, f(1, N-1; \mathrm{u})$$
$$f(1, 1; \mathrm{d}), f(1, 2; \mathrm{d}), \cdots, f(1, N-1; \mathrm{d})$$

243 在时间 2，我们有 4 个由 $N-2$ 个远期利率构成的序列，如此等等。在时间 $N-1$，存在 2^{N-1}个单独的数 $f(N-1, N-1; s_{N-1})$。

例 11.4

利用式（11.1），我们能够对例 11.1 中的数据计算远期利率，例如

$$f(1, 2; \mathrm{u}) = -\frac{\ln B(1, 3; \mathrm{u}) - \ln B(1, 2; \mathrm{u})}{\tau}$$

另外，我们可以利用例 11.3 计算出的收益率，由公式（10.7）得到

$$f(1, 2; \mathrm{u}) = 2y(1, 3; \mathrm{u}) - y(1, 2; \mathrm{u})$$

这些结果汇集在图 11—7 中。

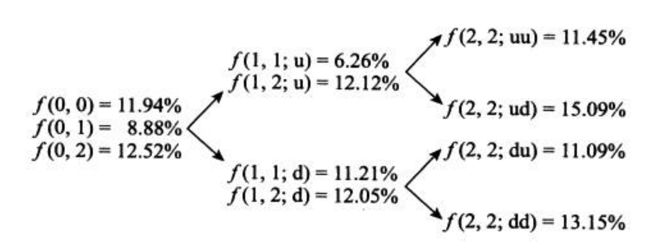


图 11—7　例 11.4 中的远期利率

包含在远期利率中的信息足以能够计算出债券的价格，正如命题 10.3 所表明的。

练习 11.3

假设远期利率树由图 11—8 中给定，计算相应的债券价格（利用 1 个月时段）。

短期利率是远期利率的特殊情况，即对于 $n \geqslant 1$，

$$r(n; s_n) = f(n, n; s_n)$$

$r(0) = f(0, 0)$，具有确定性。短期利率还可以用 $r(n; s_n) = y(n, n+1; s_n)$，$n \geqslant 1$ 和 $r(0) = y(0, 1)$给出，即利用在下一个时段到期的债券的收

244

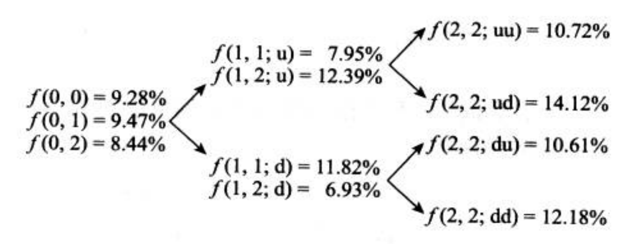


图 11—8 练习 11.3 中的远期利率

益率给出。由远期利率和收益率之间的关系可以明显地看出这一点。

我们现在描述货币市场账户，从 $A(0)=1$ 开始，下一个值

$$A(1)=\exp(\tau r(0))$$

仍然是确定性的，但在后面的时段会变成随机的。在时间 2，存在两个取决于时间 1 的状态的值

$$A(2;\ \mathrm{u})=\exp(\tau(r(0)+r(1;\ u)))=A(1)\exp\{\tau r(1;\ \mathrm{u})\}$$
$$A(2;\ \mathrm{d})=\exp(\tau(r(0)+r(1;\ \mathrm{d})))=A(1)\exp\{\tau r(1;\ \mathrm{d})\}$$

接下来，可以计算出

$$\begin{aligned}A(3;\ \mathrm{ud})&=\exp(\tau(r(0)+r(1;\ \mathrm{u})+r(2;\ \mathrm{ud})))\\&=A(2;\ \mathrm{u})\exp\{\tau r(2;\ \mathrm{ud})\}\end{aligned}$$

一般地，

$$A(n+1;\ s_{n-1}\mathrm{u})=A(n;\ s_{n-1})\exp\{\tau r(n;\ s_{n-1}\mathrm{u})\}$$
$$A(n+1;\ s_{n-1}\mathrm{d})=A(n;\ s_{n-1})\exp\{\tau r(n;\ s_{n-1}\mathrm{d})\}$$

练习 11.4

如果远期利率与练习 11.3 中的相同，计算货币市场账户的演变。

对于债券投资，货币市场账户的作用与我们在前几章论述的股票市场投资策略中无风险资产的作用相同。当对债券和衍生证券定价时，可以利用未来现金流折现，这正是我们接下来将论述的。

11.2 债券的套利定价

245

假设我们对在固定时间期界 N 到期的债券给出了债券价格 $B(n,\ N;\ s_n)$的二叉树。另外，我们还给出了货币市场过程 $A(n;\ s_{n-1})$。正如本章

一开始提及的，其他债券的价格不能完全随意变化。我们将证明，当 $M<N$ 时，价格 $B(n, M; s_n)$ 可以用到期日为 N 的债券和货币市场账户复制。根据无套利定价原理，$B(n, M; s_n)$ 的价格将等于相应的复制策略的值。

例 11.5

考虑例 11.1 中的数据，在第一个时段，短期利率是确定的，而且可以用价格 $B(0, 1)$ 推导出。货币市场账户的前两个价值分别为 $A(0)=1$ 和 $A(1)=1.01$。作为基本的工具，我们取在时间 3 到期的债券。这个债券在时间 0 和时间 1 的价格如图 11—9 所示，图中还给出了在时间 2 到期的债券的价格。我们可以找到一个资产组合 (x, y)，其中 x 为到期日为 3 的债券数；y 为货币市场头寸，使得这个资产组合的价值与到期日为时间 2 的债券在时间 1 的价格相等。为此目的，我们解如下方程组

$$0.9848x+1.01y=0.9948$$
$$0.9808x+1.01y=0.9907$$

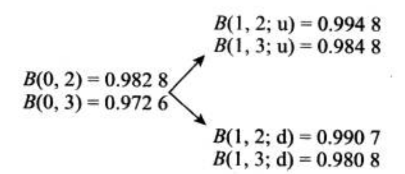


图 11—9　来自例 11.1 的债券价格

就可以得出 $x=1$，$y\cong 0.0098$。这个资产组合在时间 0 的价值为 $1\times B(0, 3)+0.0098\times A(0)\cong 0.9824$，它不等于 $B(0, 2)$。图 11—9 中的价格提供了一个套利机会：

● 以 0.982 8 美元价格卖出 1 份在时间 2 到期的债券；以 0.982 4 美元价格购买上面构造的资产组合。

● 在时间 1，无论如何，资产组合的价值足够买回债券，开始的余额 0.000 4 美元是套利利润。

246

例 11.1 中的模型与无套利原则是不一致的，因此必须加以修改，但我们只能调整某些未来价格，因为所有债券的现在价格是由市场决定的。容易看出利用 $B(1, 2; u)=0.9958$，而 $B(1, 2; d)$ 保持不变，或者令 $B(1, 2; d)=0.9913$，而 $B(1, 2; u)$保持不变，我们就能够消除套利机会。当然，除此之外还有许多利用 $B(1, 2)$ 的两个值瞬时改变来修正模型的方法。这里我们令 $B(1, 2; d)=0.9913$，而 $B(1, 2; u)$ 保持不变，则修正后的价格树如图 11—10 所示，相应的收益率如图 11—11 所示。

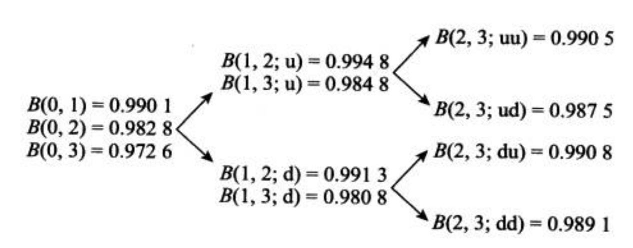


图 11—10　修正后的例 11.5 中的价格树

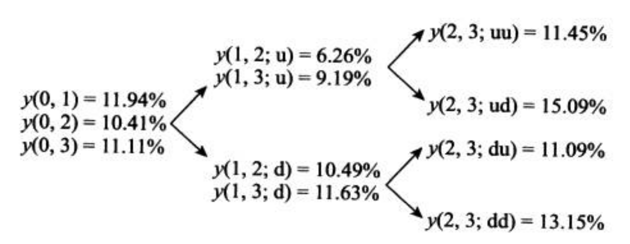


图 11—11　修正后的例 11.5 中的收益率树

注 11.2

在例 11.5 中，债券价格的修正过程与第 8 章中描述的一般衍生证券的定价存在某些相似之处：在时间 2，到期的债券起着衍生证券的作用；在时间 3，到期的债券起着基础债券的作用。但不同点是，在时间 2 到期的债券现在的价格是固定的，为消除套利机会，在模型中我们只能调整未来价格。在这个阶段，我们只关心建立模型的一致性而不针对证券定价。

练习 11.5

247

假设在时间 3 到期的债券的价格树和短期利率如图 11—12 所示，其中 $\tau=\frac{1}{12}$，对在时间 2 到期的债券定价。

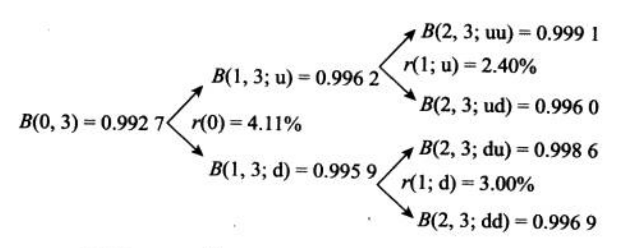


图 11—12　练习 11.5 的债券价格和短期利率

我们很容易将例 11.5 一般化。**基础债券**（underlying bond）在时间 N 到期，我们能够计算出在时间 $M<N$ 到期的任意债券的价格结构。复

制过程是从 M 开始向后逐步进行的，对于时间 M 的每个状态 s_M，有 $B(M, M; s_M)=1$。第一步是容易的：对每个状态 s_{M-1}，我们取一个资产组合 $x=0$ 和 $y=\frac{1}{A(M; s_{M-1})}$，这是因为债券在到期前一个时段变为无风险债券。

下一步，考虑时间 $M-2$。对每一个状态 s_{M-2}，我们计算 $x=x(M-1; s_{M-2})$ 和 $y=y(M-1; s_{M-2})$，其中 x 为在时间 N 到期的债券的数量；y 为货币市场头寸，我们求解方程组

$$xB(M-1, N; s_{M-2}\mathrm{u})+yA(M-1; s_{M-2})=B(M-1, M; s_{M-2}\mathrm{u})$$
$$xB(M-1, N; s_{M-2}\mathrm{d})+yA(M-1; s_{M-2})=B(M-1, M; s_{M-2}\mathrm{d})$$

以这种方式，我们可以得到在时间 M 到期的债券在时间 $M-2$ 时的价格，即

$$B(M-2, M; s_{M-3}\mathrm{u})=xB(M-2, N; s_{M-3}\mathrm{u})+yA(M-2; s_{M-3})$$
$$B(M-2, M; s_{M-3}\mathrm{d})=xB(M-2, N; s_{M-3}\mathrm{d})+yA(M-2; s_{M-3})$$

我们能够通过这个树向后移动重复这个复制过程。

注 11.3

如果二叉树模型满足类似于条件 3.2 的条件，复制是可能的。第 3 章中的条件 $u>r>d$，在这里被以下条件替代：

248

$$k(n, N; s_{n-1}\mathrm{u})>\tau r(n-1; s_{n-1})>k(n, N; s_{n-1}\mathrm{d}) \qquad (11.2)$$

任意未来现金流都可以按类似的方式被复制，例如具有固定息票的附息债券就是这样的。

例 11.6

取一个面值 $F=100$ 美元，在时间 2 到期的附息债券，在时间 1 和时间 2 支付息票 $C=10$。我们利用在时间 3 到期的零息债券作为基础证券定价未来现金流。附息债券在特定时间的价格 P 将不包括利息金额（所谓的除息价格）。假设债券的价格结构如图 11—10 所示。

考虑时间 1。在状态 u，短期利率由价格 $B(1, 2; \mathrm{u})=0.994\,8$ 确定，于是我们有 $r(1; \mathrm{u})\cong 6.26\%$。因此，$P(1; \mathrm{u})\cong 109.43$。在状态 d，我们可以利用 $B(1, 2; \mathrm{d})=0.991\,3$ 得到 $r(1; \mathrm{d})\cong 10.49\%$；$P(1; \mathrm{d})\cong 109.04$。

考虑时间 0。在时间 1 我们复制的现金流包括息票金额，于是我们得到 $P(1; \mathrm{u})+10\cong 119.43$，$P(1; \mathrm{d})+10\cong 119.04$。短期利率 $r(0)\cong 11.94\%$ 决定了货币市场账户的值，这个值与例 11.5 中的值相同，$A(1)=1.01$，因此我们计算出 $x\cong 96.25$，$y\cong 24.40$。$P(0)\cong 118.01$ 为附息债券现在的价格。

另一个方法是利用**即期收益率**（spot yield）：$y(0, 1)\cong 11.94\%$；$y(0, 2)\cong 10.41\%$，折现未来支付，即 $118.01\cong 10\times\exp\left(-\frac{1}{12}\times 11.94\%\right)+110\times\exp\left(-\frac{2}{12}\times 10.41\%\right)$。

一般地，

$$P(0)=C_1\exp\{-\tau y(0, 1)\}+C_2\exp\{-2\tau y(0, 2)\}+\cdots \\ +(C_N+F)\exp\{-N\tau y(0, N)\} \tag{11.3}$$

（为了简单起见，公式包括所有的时段。在时段 k，没有息票支付，则 $C_k=0$。）当第 k 次息票被支付时，现金流是（确定性的）息票和（随机的）剩余债券的价格之和，即

$$C_k+P(k; s_k)=C_k+C_{k+1}\exp\{-\tau y(k, k+1; s_k)\}+\cdots \\ +(C_n+F)\exp\{-\tau(n-k)y(k, n; s_k)\}$$

实际上，息票经常取决于其他量，于是附息债券可以变成衍生证券。我们将描述一个重要的案例，这里息票是按面值的比例计算的。我们将这个比例定义为付息率，可以利用将短期利率转换为等价的离散复合利率得到。特别是，当 τ 是一天时，付息率将是隔夜 LIBOR 利率（伦敦银行同业拆借利率）。

249

命题 11.1

在时间 N 到期，且当 $0<k\leqslant N$ 时，具有随机利息

$$C_k(s_{k-1})=(\exp\{\tau r(k-1; s_{k-1})\}-1)F \tag{11.4}$$

的附息债券按**面值**（at par）交易（即价格 $P(0)$ 等于面值 F）。

证明

固定时间 $N-1$ 和状态 s_{N-1}，在这种状态下，债券的价值为 $F+C_N(s_{N-1})$。如果利息由式（11.4）给出，则按短期利率折现就可以得出 $P(N-1; s_{N-1})=F$。沿着这个树继续向后，对每个状态应用相同的论证，我们最终就可以得到 $P(0)=F$。

□

练习 11.6

计算按面值交易，在时间 2 到期的债券的息票，假设收益率与例 11.5 中的相同，见图 11—11。

11.2.1 风险中性概率

在第 3 章中我们已经学过——在时间 n，股票的价格 $S(n)$ 等于在时

间 $n+1$ 股票价格 $S(n+1)$ 折现到时间 n 的价格在风险中性概率之下的期望值，这种情况类似于利率的二叉树模型。

折现因子由货币市场账户确定，换言之，由短期利率决定。一般说来，折现因子是随机的，形如 $\exp\{-\tau r(n;s_n)\}$。

假设状态 s_n 在时间 n 出现，且确定下一个时段的货币的时间价值的短期利率现在是已知的。考虑在时间 N 到期且满足条件 $n<N-1$ 的债券，我们给出这个债券的价格 $B(n, N; s_n)$ 以及下一个时段的两个可能值$B(n+1, N; s_n\mathrm{u})$ 和 $B(n+1, N; s_n\mathrm{d})$。这些可能值是随机可变的，由 $B(n+1, N; s_n)$ 定义。如果 $n=N-1$，债券在下一个时段 N 到期，则到期时只有一个与状态无关的价格，即面值。我们寻找一个概率 p_* 使得

250

$$B(n, N; s_n)=[p_*B(n+1,N;s_n\mathrm{u})+(1-p_*)B(n+1, N; s_n\mathrm{d})]\\ \times\exp\{-\tau r(n; s_n)\} \tag{11.5}$$

这个方程可以求解 p_*，p_*原则上依赖于 n，N 和 s_n。（我们很快就会发现，实际上，p_*不依赖于到期日 N，见命题 11.2。）回顾对数收益率的定义，我们有

$$B(n+1, N; s_{n+1})=B(n, N; s_n)\exp\{k(n+1, N; s_{n+1})\}$$

这样就能得出

$$p_*(n, N; s_n)=\frac{\exp\{\tau r(n; s_n)\}-\exp\{k(n+1, N; s_n\mathrm{d})\}}{\exp\{k(n+1, N; s_n\mathrm{u})\}-\exp\{k(n+1, N; s_n\mathrm{d})\}} \tag{11.6}$$

这些数称为风险中性或者鞅概率。于是，无套利条件 (11.2) 现在可以写为

$$0<p_*(n, N; s_n)<1$$

例 11.7

利用例 11.5 中修正的数据（债券价格如图 11—10 所示），对 $n=0$，1，计算风险中性概率 $p_*(n, 3; s_n)$ 树。

首先，计算货币市场收益率。最简单的方法是利用收益率（见图 11—11）。取 $\tau=\frac{1}{12}$，我们有 $\tau r(n; s_n)=\frac{y(n, n+1; s_n)}{12}$，$n=0$，1，这样就可以计算出如下值：

$$\tau r(0)=0.995\% \quad < \quad \begin{matrix}\tau r(1;\mathrm{u})=0.521\% \\ \tau r(1;\mathrm{d})=0.874\%\end{matrix}$$

其次，计算债券的收益率 $k(1, 3; s_1)$ 与 $k(2, 3; s_2)$。例如，如果 $s_2=\mathrm{ud}$，则 $k(2, 3; \mathrm{ud})=\ln\left(\frac{0.9875}{0.9848}\right)$。结果如下：

$$k(1,3;\ u)=1.25\% < \begin{matrix} k(2,3;\ uu)=0.58\% \\ k(2,3;\ ud)=0.27\% \end{matrix}$$

$$k(1,3;\ d)=0.84\% < \begin{matrix} k(2,3;\ du)=1.01\% \\ k(2,3;\ dd)=0.84\% \end{matrix}$$

251 我们可以看出，满足无套利的条件为：0.84% < 0.99% < 1.25%，0.27%<0.52%<0.58%和 0.84%<0.87%<1.01%。

最后，直接应用式（11.6），计算我们想要的概率：$p_*(0)=0.381\ 3$，$p_*(1;\ u)=0.815\ 9$，$p_*(1;\ d)=0.181\ 1$，如图 11—13 所示。

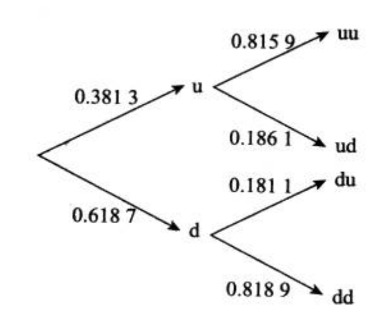


图 11—13　例 11.7 中的风险中性概率

上面模型的最主要结论是：通过复制定价等价于利用风险中性概率定价。这个结论可以由无套利原则得出，并可应用于任意现金流，甚至可以应用于状态决定数量的随机现金流。对概率 $p_*(n,\ N;\ s_n)$ 取期望是为任意证券定价的通常做法。期望值是从最后的状态开始通过树逐步向后推算出来的。

例 11.8

考虑一个面值 $F=100$ 美元，在时间 $N=2$ 到期的附息债券，息票等于债券现在价值的 5%，分别在时间 1 和时间 2 支付。特别地，在每种状态下，到期时，息票都是 $C_2=5$。利用例 11.7 中的风险中性概率我们能够计算出债券在时间 1 的价值。在上涨状态，我们利用短期利率 $r(1;\ u)\cong 6.26\%$，在到期日应支付 105 的折现值，这样就可以得到104.454 0。在下跌状态下利用同样的方法，我们得到 104.086 5。现在我们加上 5%的息票，于是在时间 1 应付的数量在上涨状态变为 109.676 7，在下跌状态变为 109.290 8。利用风险中性概率，我们可以计算出债券的现值：$108.354\ 5\cong(0.381\ 3\times109.676\ 7+0.618\ 7\times109.290\ 8)/1.01$。

练习 11.7

利用例 11.7 中的风险中性概率计算以下随机现金流的现值：在

252

时间 2，在 uu 状态下，我们收到 20 美元；在 ud 和 du 状态下收到 10 美元；在 dd 状态下没有收入。在其他时间没有支付。

练习 11.8

计算图 11—14 中的债券价格的套利机会。

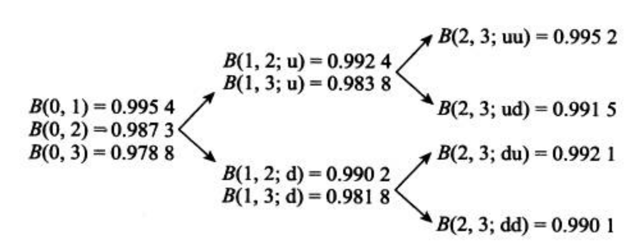


图 11—14 练习 11.8 的债券价格

练习 11.9

假设风险中性概率在每种状态下都是$\frac{1}{2}$，且假设短期利率如下图所示。计算在时间 3 到期的债券价格$\left(\text{时段为 1 个月，}\tau=\frac{1}{12}\right)$。

$$
r(0)=9.5\% \quad
\begin{cases}
r(1;\ u)=8.5\% & \begin{cases} r(2;\ uu)=8.3\% \\ r(2;\ ud)=8.9\% \end{cases} \\
r(1;\ d)=9.8\% & \begin{cases} r(2;\ du)=9.1\% \\ r(2;\ dd)=9.3\% \end{cases}
\end{cases}
$$

命题 11.2 的结论很重要，它有效地简化了模型。

命题 11.2

无套利隐含的风险中性概率与到期日无关。

253

证明

考虑到期日为 $M\leqslant N$ 的两个债券和固定的 $n\leqslant M$。对两个债券中的每一个债券，我们有

$$
\begin{aligned}
B(n,\ M;\ s_n)=&[p_*(n,\ M;\ s_n)B(n+1,\ M;\ s_n\mathrm{u}) \\
&+(1-p_*(n,\ M;\ s_n)) \\
&\times B(n+1,\ M;\ s_n\mathrm{d})]\exp\{-\tau r(n;\ s_n)\} \qquad (11.7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B(n,\ N;\ s_n)=&[p_*(n,\ N;\ s_n)B(n+1,\ N;\ s_n\mathrm{u}) \\
&+(1-p_*(n,\ N;\ s_n)) \\
&\times B(n+1,\ N;\ s_n\mathrm{d})]\exp\{-\tau r(n;\ s_n)\} \qquad (11.8)
\end{aligned}
$$

我们的目标是证明 $p_*(n, M; s_n)=p_*(n, N; s_n)$ 对于任意的状态 s_n 都成立。

我们可以借助于到期日为 N 的债券和货币市场账户复制到期日为 M 的债券的价格。因此，计算 x 与 y，使得

$$B(n+1, M; s_n\mathrm{u})=xB(n+1, N; s_n\mathrm{u})+yA(n+1; s_n)$$
$$B(n+1, M; s_n\mathrm{d})=xB(n+1, N; s_n\mathrm{d})+yA(n+1; s_n)$$

无套利原则暗含这种方程在时间 n 也成立，即

$$B(n, M; s_{n-1}\mathrm{u})=xB(n, N; s_{n-1}\mathrm{u})+yA(n; s_{n-1})$$
$$B(n, M; s_{n-1}\mathrm{d})=xB(n, N; s_{n-1}\mathrm{d})+yA(n; s_{n-1})$$

将到期日为 M 的债券的价值代入式（11.7），利用货币市场账户公式，然后进行代数变换，我们有

$$\begin{aligned}B(n, N; s_n)=[&p_*(n, M; s_n)B(n+1, N; s_n\mathrm{u})\\&+(1-p_*(n, M; s_n))\\&\times B(n+1, N; s_n\mathrm{d})]\exp\{-\tau r(n; s_n)\}\end{aligned}$$

对 $p_*(n, M; s_n)$ 求解此方程，得出求出的解与式（11.8）隐含的概率 $p_*(n, N; s_n)$ 相同，证毕。 □

练习 11.10

如果债券价格与图 11—15 中的相同，找出套利机会。

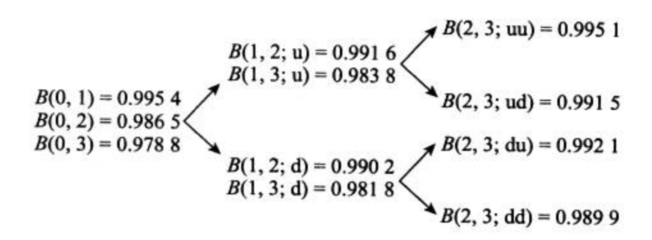


图 11—15 练习 11.10 的数据

11.3 利率衍生证券

254

我们在 11.2 节中介绍的工具可以对任意基于利率或者等价地基于债券的任意衍生证券定价。在二叉树模型的范围内，与衍生证券相联系的现金流可以利用货币市场账户和具有足够长到期日的债券复制。这个债券甚至不一定是基础证券，因为各种债券的价格必须是一致的。一个替代办法是，利用风险中性概率。该方法是可取的复制方法，因为它简单。

通过前面的论述，这两种方法的等价性是明显的。

复杂的衍生证券定价基本上可简化为寻找与之相联系的现金流。接下来我们将列举某些利率未定权益的例子。我们从最简单的期权开始。

11.3.1 期权

利率期权的基础证券是各种债券。

例 11.9

取例 11.5 的债券价格（见图 11—10），考虑在时间 3 到期的零息债券的看涨期权，其施权时间为时间 2，施权价为 $X=0.99$。最终的回报在下表的最后一列表明，从这些最终回报开始，我们逐步地往后计算利用近似的短期利率折现的连续价值的风险中性期望值

255

$n=0$	$n=1$	$n=2$
		0.000 5
	0.000 41 <	
	/	0
0.000 24		
	\	0.000 8
	0.000 14 <	
		0

因此，期权的价格为 0.000 24。

练习 11.11

假设债券价格的结构与例 11.5 相同（见图 11—10）。考虑一个在时间 2 到期的附息债券，其面值 $F=100$ 美元，在每个时段支付息票 $C=1$。计算在时间 2 施权，施权价为 $X=101.30$ 美元的美式看涨期权的价格（每个时段的债券价格包含息票）。

债券的看涨期权可以被发行能够在到期日之前以指定价格回购的债券的机构使用，具有这种条款的债券称为**可赎回债券**（callable bond）。可赎回债券的价格可以利用与之相关的期权的价格计算出。

11.3.2 互换

出售债券是借入货币的一种方法。在附息债券按面值交易的情况下，

本金表示借入的金额，息票表示利息，利息可以是固定的，也可以是浮动的（可变的）。如果所有的息票都相同，则利息是固定的。浮动利息可以用许多方法实现。这里我们假设短期利率由式（11.4）确定。我们的讨论建立在命题 11.1 之上，根据命题 11.1 浮动息票债券的市场价值一定等于它的面值，即债券按面值交易。对于按面值交易的固定息票附息债券，息票的大小可由式（11.3）很容易地计算出。我们可以认为，**合成的**（resulting）固定的付息率等价于在债券的有效期内可变的短期利率。

256

例 11.10

考虑一个固定息票债券和一个浮动息票债券，两个债券都是按年付息，且按面值交易。2 年以后到期时的面值 $F=100$ 美元。假设 1 年和 2 年零息债券的二叉树为

$$B(0,1)=0.9123,\quad B(0,2)=0.8256 \quad \Big< \quad \begin{array}{l} B(1,2;\mathrm{u})=0.9101 \\ B(1,2;\mathrm{d})=0.8987 \end{array}$$

这里时段取为 1 年，$\tau=1$，我们能估计固定息票和浮动息票附息债券的息票价值。浮动息票的大小可以由式（11.4）计算出，即

$$C_1=(B(0,1)^{-1}-1)F\cong 9.6131$$
$$C_2(\mathrm{u})=(B(1,2;\mathrm{u})^{-1}-1)F\cong 9.8780$$
$$C_2(\mathrm{d})=(B(1,2;\mathrm{d})^{-1}-1)F\cong 11.2718$$

固定息票 C 可以通过求解方程（11.3）得到，方程形式为

$$F=CB(0,1)+(C+F)B(0,2)$$

于是有

$$C\cong 10.0351$$

利用买入固定息票债券和卖出浮动息票债券（或是买入浮动息票债券，卖出固定息票债券），投资者可以构造一个现值为零的随机现金流，因为这两种债券具有相同的初始价值。

一个卖出固定息票债券并正在支付固定利息的公司，有时常常希望转换为支付浮动利率。这可以用卖出浮动息票债券和买入现值相同的固定息票债券加以实现。实际上，金融机构利用签订所谓的**互换**（swap）合约提供这种服务。显然，这种互换不涉及任何成本。下面是一个实际的例子，在这个例子中，金融机构的角色是对两家特定公司的需求加以

匹配。

例 11.11

假设公司 A 希望按可变利率借款，公司 B 愿意按固定利率借款。银行提供如下的实际利率（利率按年连续复合）：

	公司 A	公司 B
固定利率	11.40%	13.40%
可变利率	LIBOR+2%	LIBOR+3%

在这种情况下，我们说按固定利率借款，公司 A 相对于公司 B 具有比较优势；按可变利率借款，公司 B 相对于公司 A 具有比较优势。（尽管由于公司 A 的总体信用评级相对较好，总能以较低利率获得借款。）在这种情况下，公司 A 应该按固定利率借款，公司 B 应该按可变利率借款，然后它们可以将利息支付互换。

257

考虑一个借期为 1 年的 100 000 美元的本金。假设 LIBOR 为 10%（为了简单起见），且在贷款的第一年保持不变。如果公司 A 按可变利率借款，公司 B 按固定利率借款，那么它们的总的利息支付为 25 400 美元。而如果公司 A 按固定利率借款，公司 B 按可变利率借款，则利息支付的总额仅为 24 400 美元。如果两个公司谈妥利率互换，则差额 1 000 美元将在两家公司间进行分配。

两家公司应该如何分配这个差额呢？为了回答这个问题，我们假设利率的期限结构由例 11.10 中的 1 年和 2 年零息债券的价格确定。特别地，我们可以认为，LIBOR 与由债券价格推导出的有效短期利率是相同的，即 1 年的为 $B(0,\ 1)^{-1}-1$，2 年的为 $B(1,\ 2)^{-1}-1$。它们与例 11.10 中浮动息票债券隐含的利率是相同的。固定息票隐含的利率为 10.04%。

如果不与公司 B 互换，公司 A 想要得到相同的结果，需要以固定利率 11.40%从银行贷款 100 000 美元，买入 1 000 份固定息票债券，卖出如例 11.10 中的 1 000 份浮动息票债券。因此，公司 A 以 11.40%－10.04%＋LIBOR＝LIBOR＋1.36%利率借入 100 000 美元。与可变利率 LIBOR＋2%相比较，可以得到 0.64%的利润。这意味着，从 100 000 美元贷款上，每年可以得到 640 美元收益。

利用类似的论证，不与公司 A 互换，公司 B 将以可变利率 LIBOR＋3%借入 100 000 美元，买入 1 000 份浮动息票债券，卖出 1 000 份固定息票债券。因此，公司 B 将会以 LIBOR＋3%－LIBOR＋10.04%＝13.04%利率支付利息。与固定利率 13.40%相比较，可以得到 0.36%利润。这意味着，从 100 000 贷款上每年可以得到 360 美元收益。

258

结论是，1 000 美元的收益被公司 A 和公司 B 两家公司分享的份额分别为 640 美元和 360 美元。

最后，注意，互换的价值可能会随着时间和状态而改变，并偏离初始价值。如果公司想要在以后的时间签订互换协议，可以购买**互换期权**（swaption），它是互换价值的看涨期权（具有指定的施权价和到期时间）。

11.3.3 利率的上限和下限

利率上限（cap）是可变利率债券的一个附加条款，它指定了在债券的有效期内每个时段支付的最大的付息率。**利率上限元**（caplet）是应用于单个时期的类似条款，换言之，利率上限元是支付或收到的利率水平的欧式期权。利率上限可以看做是一系列的利率上限元。

例 11.12

我们通过卖掉于时间 3 到期的**按面值浮动息票平价债券**（par floating-coupon bond，即债券价格总是等于债券的**票面价值**（par value），息票被与式（11.4）相同的短期利率隐含）从而得到一笔贷款。我们使用债券的价格和例 11.5 中的利率，见图 11—10 和图 11—11。下面列出的现金流包括卖出债券的初始金额、息票和支付的面值，即

$n=0$		$n=1$		$n=2$
		−0.999 90	—	−100.522 72
100	<			
		−0.999 90	—	−100.877 64

考虑在时间 1（1 个月）应用的利率上限元，施权利率是 8%（1 个月的施权利率相应为 0.67%）。息票由利率上限元利率 0.668 89 确定，据此修正现金流。通过时间 1 价值的折现，我们可以得到债券在时间 0 的价格，其中在时间 1 的每个状态的值都定为 100.668 89，即 100 加上息票。这样就可以得出如下的现金流，即

$n=0$		$n=1$		$n=2$
		−0.668 89	—	−100.522 72
99.672 27	<			
		−0.668 89	—	−100.877 64

259 债券的价格减少约利率上限元的价值，即 0.327 73。

对于在时间 2 具有相同施权利率的利率上限元，息票的最大值为 0.668 89，与前面一样。在上涨状态，我们支付原来的利息；在下跌状态，我们施权利率上限元。在时间 1，债券的价值不是 100，因为息票不

再与利率上限债券相同。时间 1 的价格可以利用时间 2 的价值折现得到。在时间 0，我们对债券在时间 1 的折现值计算风险中性期望，求得债券的价格。得到的现金流为

$n=0$	$n=1$	$n=2$
	$-0.999\,90$ —	$-100.522\,72$
$99.873\,23$ <		
	$-0.999\,90$ —	$-100.668\,89$

这样就可以把这个利率上限元的价格固定在 0.126 77。

最后，考虑在时间 1 和时间 2 具有与上面相同的施权利率的利率上限，则我们会以类似的方式得到以下现金流：

$n=0$	$n=1$	$n=2$
	$-0.668\,89$ —	$-100.522\,72$
$99.545\,50$ <		
	$-0.668\,89$ —	$-100.668\,89$

我们可以看出，利率上限值 0.454 50 等于这些利率上限元值之和。

类似地，利率下限是从下方限制息票的条款。这将对债券持有者有用。它由一系列对应于每个时期的**利率下限元**（floorlet）构成。

练习 11.12

按照上面的例子，根据例 11.5 的债券价格计算在时间 2 施权，施权利率为 8%的利率下限的值。

11.4 最后的评注

我们用建立债券价格结构模型的可能方法的非正式评注结束本章。这是一个复杂的领域，在这里我们只能作些一般性的说明。

正如我们已经论述的，与股票价格理论相比，利率理论更复杂。为了对利率衍生产品定价，我们需要知道每一个到期日的债券可能价值的模型，但到期日不同的债券的价格必须相互一致。正如我们上面所看到的一样，以下两类模型可以确定所有早到期的可能的价格结构：

260

（a）可能的短期利率模型；

（b）具有更长到期日的债券可能价值的模型（与最初期限结构一致）。

另一个替代的方法是指定

（a）可能的短期利率模型；

(b) 每一个状态的概率。

并且取这些概率作为风险中性概率，对全部到期日计算所有债券的价格。后一个方法在概念上更简单，尤其是如果在每个状态取相同的概率。短期利率的灵活性可以使得我们得到足够多的与初始期限结构一致的模型。

如果是这样的话，那么二叉树每个状态的概率为 1/2 的最简单的选择似乎就与任意的选择一样好，接下来我们集中注意力构造短期利率模型使得参数与历史数据一致。离散时间的一般短期利率模型描述如下。令 $t_n = n\tau$。那么如下的关系式就可以详细描述利率变动树，即

$$r(t_{n+1}) - r(t_n) = \mu(t_n, r(t_n))\tau + \sigma(t_n, r(t_n))\xi_n$$

式中，$\xi_n = \pm 1$ 在每个状态的概率为 1/2；$\mu(t, r)$，$\sigma(t, r)$ 为选择的合适的函数。利用连续时间极限（即 3.3.2 节），则这些关系式就可以写为如下形式的随机微分方程

$$\mathrm{d}r(t) = \mu(t, r(t))\mathrm{d}t + \sigma(t, r(t))\mathrm{d}\omega(t)$$

有很多能指定函数 μ 和 σ 的方法，但没有一个方法是被普遍接受的。这里举几个例子：$\mu(t, r) = b - ar$，$\sigma(t, r) = \sigma$（瓦希切克模型（Vasiček model））；$\mu(t, r) = a(b - r)$，$\sigma(t, r) = \sigma\sqrt{r}$（考克斯-英格索尔-罗斯模型（Cox-Ingersoll-Ross model））；$\mu(t, r) = \theta(t)r$，$\sigma(t, r) = \sigma r$（布莱克-德曼-托伊模型（Black-Derman-Toy model））。

给定短期利率，接下来我们计算债券价格，它们都依赖于函数 μ 和 σ。我们可能会遇到两个问题：

1. 模型太简单。如果这些函数为常数，那么我们就不能对它们进行调整使得得到的债券价格与初始的期限结构一致。

2. 模型太复杂。如果我们取最一般的函数 μ 和 σ，然后对参数施加一些限制以满足初始期限结构，但许多参数仍是未加限制的，这样的结果太过一般化以致没有实际用处。如果采用折中的解决方法，这些问题就可以避免。

261

还有另一个替代方法是详细说明远期利率曲线的动态，这样就可以确定期限结构的演变，初始的期限结构起的是原始数据的作用。这听起来在概念上很简单，但希思-雅罗-默顿连续时间模型（Heath-Jarrow-Morton model）的数学方法非常复杂。

关于这个课题的数学文献非常多，而且还在不断增加。我们建议对此感兴趣的读者可以阅读，例如普利斯卡（Pliska，1997）和雅罗（Jarrow，1995）关于离散时间模式的文献；比约克（Björk，1998）和陈（Chen，1996）关于连续时间模型的文献。



第 1 章

263

1.1 资产组合在时间 0 的价值为

$$V(0)=xS(0)+yA(0)=1\ 600\ (\text{美元})$$

资产组合在时间 1 的价值为

$$V(1)=xS(1)+yA(1)=\begin{cases}1\ 800 & \text{如果股票上涨}\\1\ 700 & \text{如果股票下跌}\end{cases}$$

因此，资产组合的收益率

$$K_V=\frac{V(1)-V(0)}{V(0)}=\begin{cases}0.125\ 0 & \text{如果股票上涨}\\0.062\ 5 & \text{如果股票下跌}\end{cases}$$

即 12.5%或者 6.25%。

1.2 假设债券和股票价格与练习 1.1 相同，资产组合 (x, y) 在时间 1 的价值为

$$V(1)=\begin{cases}30x+100y & \text{如果股票上涨}\\20x+100y & \text{如果股票下跌}\end{cases}$$

因此，我们得到方程组

$$\begin{cases}30x+100y=1\ 160\\20x+100y=1\ 040\end{cases}$$

方程组的解为 $x=12$，$y=8$。由 12 股股票和 8 份债券构成的资产组合将产生题中要求的时间 1 的价值，这个资产组合在时间 0 的价值为

$$V(0)=12\times25+8\times90=1\ 020\ (\text{美元})$$

1.3 以下策略产生套利机会：

264

● 通过交易商 A 将 1 美元兑换成 $\frac{1}{1.584\ 4}\cong0.631\ 2$ 英镑。

● 通过交易商 B 将 0.631 2 英镑兑换成 $\frac{0.631\ 2}{0.640\ 1}\cong0.986\ 1$ 欧元。

● 通过交易商 A 将 0.986 1 欧元兑换成 $0.986\ 1\times1.020\ 2\cong1.006\ 0$ 美元。

这样将得到大约 0.006 0 美元的套利机会。

1.4 我们希望 $xS(0)$ 和 $yA(0)$ 都等于初始财富的一半，这样就可以给出 $80x=5\ 000$，$100y=5\ 000$，于是有 $x=62.5$，$y=50$，该资产组合在时间 1 的价值为

$$V(1)=62.5S(1)+50A(1)=\begin{cases}11\ 750 & \text{如果股票上涨}\\9\ 250 & \text{如果股票下跌}\end{cases}$$

因此，这个资产组合的收益率为

$$K_V=\begin{cases}0.175 & \text{如果股票上涨}\\-0.075 & \text{如果股票下跌}\end{cases}$$

现在我们计算期望收益

$$E(K_V)=0.175\times0.8-0.075\times0.2=0.125$$

即 12.5%；风险为

$$\sigma_V=\sqrt{(0.175-0.125)^2\times0.8+(-0.075-0.125)^2\times0.2}=0.1$$

即 10%。

1.5 以下策略将产生套利机会，在时间 0：

● 借入 34 美元；

● 以 34 美元价格买入 1 股股票；

● 签订远期合约空头头寸，其远期价格为 38.60 美元，交割日为时间 1。

在时间 1：

● 以 38.60 美元卖出股票，结清远期协议；

● 支付 $34\times1.12=38.08$ 美元结清贷款及利息。

余额 $38.60-38.08=0.52$ 美元就是套利利润。

1.6 假设承诺在时间 1 支付 100 英镑的债券在时间 0 卖 x 英镑，为计算 x，考虑如下策略，在时间 0：

● 借入 $1.6x$ 美元并兑换成 x 英镑；

● 以 x 英镑买入英镑债券；

● 取得远期空头头寸，以 1.50 美元兑换 1 英镑的价格卖出 100 英镑，交割日为时间 1。

那么在时间 1：

● 变现债券，得到 100 英镑；

● 结清远期空头头寸，以 150 美元价格卖出 100 英镑；

● 归还贷款和利息，总额为 $1.68x$ 美元。

这些交易的余额为 $150-1.68x$ 美元，余额必须为零，否则存在套利机会。由此得出，在时间 1 承诺支付 100 英镑的债券必须卖 $x=\frac{150}{1.68}\cong 89.29$ 英镑。

265

1.7 (a) 施权价为 90 美元的看涨期权的回报为

$$C(1)=\begin{cases}30 & \text{如果股票上涨}\\ 0 & \text{如果股票下跌}\end{cases}$$

用于复制的 x 股股票和 y 份债券的投资满足方程组

$$\begin{cases}120x+110y=30\\ 80x+110y=0\end{cases}$$

方程组的解为 $x=\frac{3}{4}$，$y=-\frac{6}{11}$，因此期权的价格一定是

$$C(0)=\frac{3}{4}\times100-\frac{6}{11}\times100\cong20.45\text{（美元）}$$

(b) 施权价为 110 美元的看涨期权的回报为

$$C(1)=\begin{cases}10 & \text{如果股票上涨}\\ 0 & \text{如果股票下跌}\end{cases}$$

用于复制的 x 股股票和 y 份债券的投资满足

$$\begin{cases}120x+110y=10\\ 80x+110y=0\end{cases}$$

解这个方程组我们可以计算出 $x=\frac{1}{4}$，$y=-\frac{2}{11}$，因此期权价格为

$$C(0)=\frac{1}{4}\times100-\frac{2}{11}\times100\cong6.82\text{（美元）}$$

1.8 (a) 用于复制的 x 股股票和 y 份债券的投资满足方程组

$$\begin{cases}120x+105y=20\\80x+105y=0\end{cases}$$

解方程组可以计算出 $x=\frac{1}{2}$，$y=-\frac{8}{21}$。因此

$$C(0)=\frac{1}{2}\times100-\frac{8}{21}\times100\cong11.91\text{（美元）}$$

(b) 在这种情况下，用于复制的 x 股股票和 y 份债券的投资满足

$$\begin{cases}120x+115y=20\\80x+115y=0\end{cases}$$

于是 $x=\frac{1}{2}$，$y=-\frac{8}{23}$，由此得出

$$C(0)=\frac{1}{2}\times100-\frac{8}{23}\times100\cong15.22\text{（美元）}$$

266

1.9 我们需要计算 x 股股票和 y 份债券的投资用于复制看跌期权，即使得无论股票上涨还是下跌，有 $xS(1)+yA(1)=P(1)$，这样就得到方程组

$$\begin{cases}120x+110y=0\\80x+110y=20\end{cases}$$

其解为 $x=-\frac{1}{2}$，$y=\frac{6}{11}$。为复制看跌期权需要取得 $\frac{1}{2}$ 股股票空头和 $\frac{6}{11}$ 份债券。这个投资在时间 0 的价值为

$$xS(0)+yA(0)=-\frac{1}{2}\times100+\frac{6}{11}\times100\cong4.55\text{（美元）}$$

根据与命题 1.3 类似的论证，我们可以计算出 $xS(0)+yA(0)=P(0)$，否则存在套利机会。所以，看跌期权的价格必是 $P(0)\cong4.55$ 美元。

1.10 投资者买入 $\frac{500}{100}=5$ 股股票和 $\frac{500}{13.6364}\cong36.6667$ 份期权，最终财富为 $5\times S(1)+36.6667\times C(1)$。如果股票上涨到 120 美元，最终财富为 $5\times120+36.6667\times20\cong1\,333.33$ 美元；如果股票下跌到 80 美元，最终财富为 $5\times80+36.6667\times0\cong400.00$ 美元。

1.11 (a) 如果 $p=0.25$，没有买入期权，则买入 1 股股票的成本的标准差约为 51.96 美元；如果买入期权，则标准差约为 25.98 美元。

(b) 如果 $p=0.5$，那么标准差分别为 60 美元和 30 美元。

(c) 如果 $p=0.75$，那么标准差分别约为 51.96 美元和 25.98 美元。

1.12 取值为 a，b 的概率分别为 p 和 $1-p$ 的随机变量的标准差为

$|a-b|\sqrt{p(1-p)}$。如果不利用期权，买 1 股的成本为 160 美元或 40 美元，将取决于股票是上涨还是下跌。在这种情况下，$|a-b|=|160-40|=120$美元。如果使用期权，则成本为 135 美元或 75 美元，$|a-b|=|135-75|=60$ 美元。显然，无论 p 取何值，标准差都将减少一半。

第 2 章

2.1 利率 r 满足

$$\left(1+\frac{61}{365}\times r\right)\times 9\ 000=9\ 020$$

解得 $r\cong 0.013\ 3$，即 1.33%，投资收益率为

$$K\left(0,\ \frac{61}{365}\right)=\frac{9\ 020-9\ 000}{9\ 000}\cong 0.002\ 2$$

即 0.22%。

2.2 用 P 表示今天支付的金额，那么收益率为

$$\frac{1\ 000-P}{P}=0.02$$

解得 $P\cong 980.39$ 美元。

267

2.3 时间 t 满足

$$(1+t\times 0.09)\times 800=830$$

解得 $t\cong 0.416\ 7$ 年，即 $0.416\ 7\times 365\cong 152.08$ 天，收益率为

$$K(0,\ t)=\frac{830-800}{800}=0.037\ 5$$

即 3.75%。

2.4 投资的本金 P 满足

$$\left(1+\frac{91}{365}\times 0.08\right)\times P=1\ 000$$

解得 $P\cong 980.44$ 美元。

2.5 如果终值是本金的 2 倍，时间 t 满足

$$\left(1+\frac{0.06}{365}\right)^{365t}=2$$

解得 $t\cong 11.553\ 4$ 年，因为最后的分数天没有利息支出，这个时间为 11 年零 202 天（我们不考虑闰年，简单地假设 1 年有 365 天）。

2.6 利率 r 满足方程

$$(1+r)^{10}=2$$

解得 $r\cong 0.071\,8$，即 7.18%。

2.7 (a) 在按年复合的情况下，两年以后的价值为

$$V(2)=\left(1+\frac{0.1}{1}\right)^{2\times 1}\times 100=121.00\text{（美元）}$$

(b) 按半年复合的价值为

$$V(2)=\left(1+\frac{0.1}{2}\right)^{2\times 2}\times 100\cong 121.55\text{（美元）}$$

显然高于情况 (a)。

2.8 如果以利率 15%按天复合，一年之后存款增长为

$$\left(1+\frac{0.15}{365}\right)^{1\times 365}\times 1\,000\cong 1\,161.80\text{（美元）}$$

如果以利率为 15.5%按半年复合，一年以后的价值为

$$\left(1+\frac{0.155}{2}\right)^{1\times 2}\times 1\,000\cong 1\,161.01\text{（美元）}$$

比上面的情况少。

268

2.9 初始本金 P 满足方程

$$(1+0.12)^2P=1\,000$$

解此方程得出 $P\cong 797.19$ 美元。

2.10 (a) 在按天复合情况下的现值为

$$100\,000\left(1+\frac{0.05}{365}\right)^{-100\times 365}\cong 674.03\text{（美元）}$$

(b) 如果按年复合，则现值为

$$100\,000(1+0.05)^{-100}\cong 760.45\text{（美元）}$$

2.11 收益率为

$$K(0,1)=\left(1+\frac{0.1}{12}\right)^{12}-1\cong 0.104\,7$$

即 10.47%。

2.12 利用二项式公式对 m 次幂展开，我们得到

$$K(0,1)=\left(1+\frac{r}{m}\right)^m-1$$

$$=1+r+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)}{2!}r^2+\cdots+\frac{\left(1-\frac{m-1}{m}\right)}{m!}r^m-1>r$$

如果 m 是大于 1 的整数。

2.13 假设 r 为利率；P 为借入金额；C 为分期偿还金额，则有

$$C=\frac{P}{\text{PA}(r,\ 5)}=\frac{Pr}{1-(1+r)^{-5}}$$

见例2.4。令 $n=1$，2，3，4 或 5。$n-1$ 次分期偿还以后，未偿还的余额的现值等于借入金额减去 $n-1$ 个分期偿还的现值，即

$$P-\frac{C}{1+r}-\cdots-\frac{C}{(1+r)^{n-1}}=P\frac{(1+r)^{6-n}-1}{(1+r)^{5}-1}$$

269

$n-1$ 次分期偿还以后，实际剩下的余额等于上式除以折现因子 $(1+r)^{-(n-1)}$，于是有

$$P\frac{(1+r)^{5}-(1+r)^{n-1}}{(1+r)^{5}-1} \tag{S.1}$$

第 n 次偿还包含的利息为

$$P\frac{(1+r)^{5}-(1+r)^{n-1}}{(1+r)^{5}-1}r \tag{S.2}$$

第 n 次偿还本金部分是第 $n-1$ 次分期偿还以后的贷款未偿还的余额减去第 n 次分期偿还以后的余额，根据（S.1），这个差额等于

$$P\frac{(1+r)^{n}-(1+r)^{n-1}}{(1+r)^{5}-1}=P\frac{r(1+r)^{n-1}}{(1+r)^{5}-1} \tag{S.3}$$

取 $P=1\ 000$ 美元，$r=15\%$，按式（S.1）、式（S.2）、式（S.3）计算的结果如下表所示。

t（年）	利息支付（美元）	偿还的本金（美元）	未偿还的余额（美元）
0	—	—	1 000.00
1	150.00	148.32	851.68
2	127.75	170.56	681.12
3	102.17	196.15	484.97
4	72.75	225.57	259.40
5	38.91	259.40	0.00

2.14 你能够负担的偿债数量为

$$\text{PA}(18\%,\ 10)\times 10\ 000=\frac{1-(1+0.18)^{-10}}{0.18}\times 10\ 000$$
$$\cong 44\ 941\ (\text{美元})$$

2.15 40 年以后的余额的现值为

$$\text{PA}(5\%, 40)\times 1\ 200=\frac{1-(1+0.05)^{-40}}{0.05}\times 1\ 200\cong 20\ 591\ (\text{美元})$$

除以折现因子 $(1+0.05)^{-40}$，我们就可以计算出 40 年以后的实际余额为

$$\frac{20\ 591}{(1+0.05)^{-40}}\cong 144\ 960(\text{美元})$$

2.16 每年的支付等于

$$C=\frac{100\ 000}{\text{PA}(6\%, 10)}\cong 13\ 586.80\ (\text{美元})$$

8 年以后（第 8 年已经支付）抵押贷款未偿还的余额是

$$\text{PA}(6\%, 2)\times C\cong 24\ 909.93\ (\text{美元})$$

2.17 假设支付 C，$C(1+g)$，$C(1+g)^2$，…是 1 年以后、2 年以后、3 年以后，如此下去的支付。如果利率为常数 r，那么这些支付的现值为 $C(1+r)^{-1}$，$C(1+g)(1+r)^{-2}$，$C(1+g)^2(1+r)^{-3}$，…。无穷个支付的现值为

$$\frac{C}{1+r}+\frac{C(1+g)}{(1+r)^2}+\frac{C(1+g)^2}{(1+r)^3}+\cdots=\frac{C}{r-g}$$

270

条件 $g<r$ 必须满足，否则序列是发散的，利用这个公式和切掉尾部的方法，我们可以计算出年的支付为

$$\frac{C}{r-g}-\frac{C(1+g)^n}{r-g}\frac{1}{(1+r)^n}=C\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^n}{r-g}$$

2.18 取得 1 美元利息收入的时间 t 满足

$$e^{0.1t}\times 1\ 000\ 000\cong 1\ 000\ 001$$

解得 $t\cong 0.000\ 01$ 年，即 315.36 秒。

2.19 (a) 1626 年购买曼哈顿的 24 美元在 2000 年的价值为

$$24e^{(2000-1626)\times 0.05}\cong 3\ 173\ 350\ 575\ (\text{美元})$$

(b) 同样的金额以 5%利率按年复合在 2000 年的价值为

$$24(1+0.05)^{2000-1626}\cong 2\ 018\ 408\ 628\ (\text{美元})$$

2.20 100 美元存款以 10%利率连续复合，1 年以后变为

$$100e^{0.1}\cong 110.52\ (\text{美元})$$

100 美元存款以 10%利率按月复合，1 年以后变为

$$100\left(1+\frac{0.1}{12}\right)^{12}\cong 110.47\ (\text{美元})$$

相差约 0.05 美元。

如要使差额小于 0.01 美元，复合频率 m 须满足

$$100\left(1+\frac{0.1}{m}\right)>110.51$$

这意味着，m 应该大于 55.19。

2.21 现值为

$$1\ 000\ 000e^{-20\times0.06}\cong301\ 194\text{（美元）}$$

2.22 利率 r 满足

$$950e^{0.5r}=1\ 000$$

由此得出

$$r=\frac{1}{0.5}\ln\frac{1\ 000}{950}\cong0.102\ 6$$

即大约为 10.26%。

2.23 利率是

$$r=\frac{0.03}{\frac{2}{12}}=0.18$$

即 18%。

271

2.24 利率 r 满足

$$e^{r}=\left(1+\frac{0.12}{12}\right)^{12}$$

解得 $r\cong0.119\ 4$，大约为 11.94%。

2.25 频率 m 满足

$$\left(1+\frac{0.2}{m}\right)^{m}=1+0.21$$

因此，$m=2.0$。

2.26 如果采用利率为 r 的按月复合，则 $\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12}=1+r_e$，年金的现值为

$$\begin{aligned}V(0)&=\frac{C}{1+\frac{r}{12}}+\frac{C}{\left(1+\frac{r}{12}\right)^{2}}+\cdots+\frac{C}{\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12n}}\\&=\frac{C}{(1+r_e)^{\frac{1}{12}}}+\frac{C}{(1+r_e)^{\frac{2}{12}}}+\cdots+\frac{C}{(1+r_e)^{n}}\\&=C\frac{1-(1+r_e)^{-n}}{(1+r_e)^{\frac{1}{12}}-1}\end{aligned}$$

2.27 如果采用利率为 r 的按 2 个月复合，则 $\left(1+\frac{r}{6}\right)^6=1+r_e$，永续年金的现值为

$$V(0)=\frac{C}{1+\frac{r}{6}}+\frac{C}{\left(1+\frac{r}{6}\right)^2}+\frac{C}{\left(1+\frac{r}{6}\right)^3}+\cdots$$
$$=\frac{C}{(1+r_e)^{\frac{1}{6}}}+\frac{C}{(1+r_e)^{\frac{2}{6}}}+\frac{C}{(1+r_e)^{\frac{3}{6}}}+\cdots$$
$$=C\frac{1}{(1+r_e)^{\frac{1}{6}}-1}$$

2.28 我们对 r 解方程

$$100=95(1+r)^{\frac{1}{2}}$$

可以计算出隐含的有效利率大约为 10.80%。如果这个利率保持不变，债券在时间 t 达到 99 美元，则有

$$100=99(1+r)^{\left(\frac{1}{2}-t\right)}$$

方程的解为 $t\cong 0.402$ 年，即大约为 $0.402\times 365\cong 146.73$ 天。在 147 天债券的价格达到 99 美元。

2.29 为计算按年复合的隐含利率 r，可对 r 求解方程

$$(1+r)^{-(1-0.5)}=0.9455$$

方程的解为 11.86%。解方程

$$\left(1+\frac{r}{2}\right)^{-2(1-0.5)}=0.9455$$

我们计算出按半年复合利率约为 11.53%，解方程

$$e^{-r(1-0.5)}=0.9455$$

计算出连续复合利率约为 11.21%。

272

2.30 (a) 如果连续复合利率为 8%，则债券的价格为

$$5e^{-0.08}+5e^{-2\times 0.08}+5e^{-3\times 0.08}+105e^{-4\times 0.08}\cong 89.06\text{（美元）}$$

(b) 如果利率为 5%，则债券的价格为

$$5e^{-0.05}+5e^{-2\times 0.05}+5e^{-3\times 0.05}+105e^{-4\times 0.05}\cong 99.55\text{（美元）}$$

2.31 债券价格作为连续复合利率 r 的函数可以表示为 $5e^{-r}+5e^{-2r}+5e^{-3r}+105e^{-4r}$。这个函数的图形如图 S—1 所示，当 $r\searrow 0$ 时，价格逼近 5+5+5+105＝120 美元。当 $r\nearrow\infty$ 时取极限，价格趋于零。

2.32 在例 2.9 和例 2.10 中，在时间 t，债券的价格为

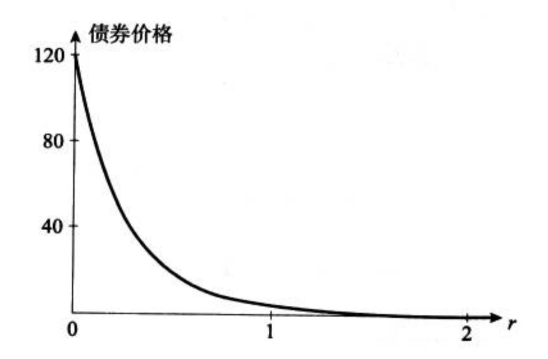


图 S—1 在练习 2.31 中，债券价格随利率变化的图形

$10e^{r(t-1)}+10e^{r(t-2)}+10e^{r(t-3)}+10e^{r(t-4)}+110e^{r(t-5)}$ 如果 $0\leqslant t<1$
$10e^{r(t-2)}+10e^{r(t-3)}+10e^{r(t-4)}+110e^{r(t-5)}$ 如果 $1\leqslant t<2$
$10e^{r(t-3)}+10e^{r(t-4)}+110e^{r(t-5)}$ 如果 $2\leqslant t<3$
$10e^{r(t-4)}+110e^{r(t-5)}$ 如果 $3\leqslant t<4$
$110e^{r(t-5)}$ 如果 $4\leqslant t<5$

图形如图 S—2 所示。

273

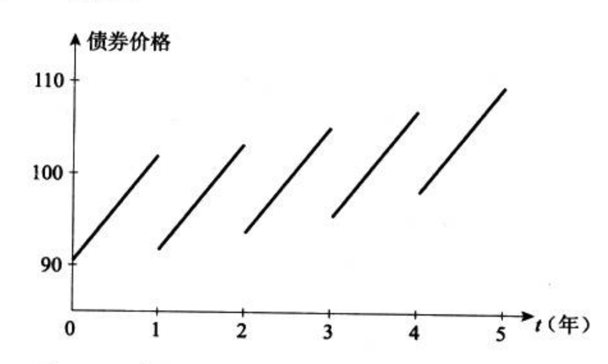


图 S—2 在练习 2.32 中，债券的价格随时间变化的图形

2.33 在图 S—2 中我们可以看出，债券价格在 1 年内达到 95 美元的第一时间，此时债券价格由 $10e^{r(t-1)}+10e^{r(t-2)}+10e^{r(t-3)}+10e^{r(t-4)}+110e^{r(t-5)}$ 给出。取 $r=0.12$，我们能够计算出债券价格达到 95 美元的时间 t，通过解方程

$$10e^{r(t-1)}+10e^{r(t-2)}+10e^{r(t-3)}+10e^{r(t-4)}+110e^{r(t-5)}=95$$

计算出 $t\cong 0.4257$ 年或者 155.4 天。

2.34 因为债券按面值交易，债券的初始价格与面值 $F=100$ 相同，计算隐含的连续复合利率可以通过解方程

$$8e^{-r}+8e^{-2r}+108e^{-3r}=100$$

计算出 $r \cong 0.0770$ 或者 7.70%。

2.35 通过解方程

$$(1+r)^{-1}=0.89$$

我们可以计算出 $r \cong 0.1236$，即债券隐含的有效利率大约为 12.36%。75 天以后债券的价格为

$$B\left(\frac{75}{365}, 1\right)=B(0, 1)(1+r)^{\frac{75}{365}}=0.89(1+0.1236)^{\frac{75}{365}} \cong 0.9115$$

收益率为

$$K\left(0, \frac{75}{365}\right)=\frac{B\left(\frac{75}{365}, 1\right)-B(0, 1)}{B(0, 1)} \cong \frac{0.9115-0.89}{0.89}$$
$$\cong 0.0242$$

大约为 2.42%。

2.36 6 个月单位债券的初始价格为 $e^{-0.5r}$，其中 r 为连续复合利率。如果债券在 6 个月后产生 7%的收益，则有

$$\frac{1-e^{-0.5r}}{e^{-0.5r}}=0.07$$

解得 $r \cong 0.1353$ 或者 13.53%。

2.37 债券隐含的连续利率满足方程

$$e^{-r}=0.92$$

方程的解为 $r \cong 0.0834$。在时间 t，债券的价值为 $0.92e^{rt}$。假设债券在时间 t 产生 5%的收益，使得

$$\frac{0.92e^{rt}-0.92}{0.92}=0.05$$

于是有 $t \cong 0.5851$ 年或者 213.6 天。

2.38 在时间 0，我们买入 $\frac{1}{B(0, 1)}=e^{r}$ 份债券，则在时间 1 持有的债券会增加到 $\frac{e^{r}}{B(1, 2)}=e^{2r}$ 份。一般地，在时间 n，我们会买入 $e^{(n+1)r}$ 份 1 年期债券。

274

2.39 因为债券按面值交易，利率保持不变，在每一年开始时，债券的价格为 100 美元。在年初，用 1 000 美元买入 10 份债券；在年末，债券支付利息 $10\times 8=80$ 美元，以 100 美元的价格能购买 0.8 份债券，因此，在第 2 年，投资者持有 $10+0.8=10.8$ 份债券。在年末，债券支付利息 $10.8\times 8=86.4$ 美元，以 100 美元的价格能购买 0.864 份债券，

因此，在第 3 年持有的债券数量为 10.8＋0.864＝11.664，如此继续下去。

一般来说，在第 n 年持有的债券的数量为

$$10\left(1+\frac{8}{100}\right)^{n-1}$$

这就给出了第 1～5 年持有的债券数量分别为 10.000 0、10.800 0、11.664 0、12.597 1、13.604 9。

第 3 章

3.1 例 3.1 中的状况和价格变动树如图 S—3 所示。

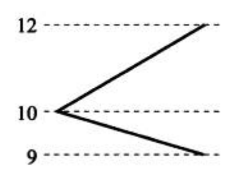


图 S—3 例 3.1 中的价格变动树

3.2 状况和价格变动树如图 S—4 所示。从左边的树根朝向右边的树梢经过的路径表示共有 8 个状况。

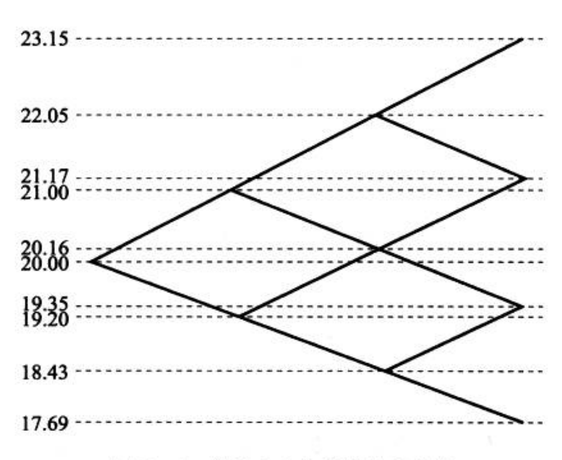


图 S—4 练习 3.2 中的价格变动树

3.3 利用式（3.1)，可以计算出：

状况	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$	$S(3)$
ω_1	45.00	49.50	51.98	46.78
ω_2	45.00	47.25	51.98	57.17
ω_3	45.00	47.25	42.53	46.78

这个树如图 S—5 所示。

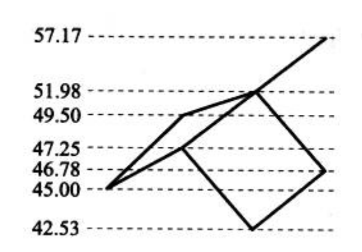


图 S—5　练习 3.3 中的价格变动树

3.4　如果支付红利，则式（3.1）变为

$$S(n)=S(n-1)(1+K(n))-\text{div}(n)$$

于是有

状况	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$	$S(3)$
ω_1	45.00	48.50	49.93	43.93
ω_2	45.00	46.25	49.88	53.86
ω_3	45.00	46.25	40.63	43.69

275

3.5　将两个时段上的收益与单时段收益之和进行比较，可以得到如下数值

状况	$K(0,2)$	$K(1)+K(2)$
ω_1	15.50%	15.00%
ω_2	15.50%	15.00%
ω_3	−5.50%	−5.00%

在 3 个时段，我们有

状况	$K(0,3)$	$K(1)+K(2)+K(3)$
ω_1	3.95%	5.00%
ω_2	27.05%	25.00%
ω_3	3.95%	5.00%

如果这些单时段收益率的符号不同，则单时段收益率之和大于整个区间的收益率。

276

3.6　首先计算 $K(0,2)$，然后由关系式 $1+K(0,2)=(1+K)^2$（假设 $1+K>0$）计算 $K(1)=K(2)=K$，于是有

状况	$K(0,2)$	$K(1)=K(2)$
ω_1	17.14%	8.23%
ω_2	−8.57%	−4.38%
ω_3	−20.00%	−10.56%

3.7 公式

$$1+K(0,2)=(1+K(1))(1+K(2))$$

可用于计算 $K(2)$。例如，如下的状况和 $K(2)$ 的数值与练习 3.7 的条件一致，即

状况	$K(0,2)$	$K(1)$	$K(2)$
ω_1	21.00%	10.00%	10.00%
ω_2	10.00%	10.00%	0.00%
ω_3	−1.00%	−10.00%	10.00%

这不是仅有的可能解，另一个解可以通过改变状况 ω_2 得到，即

状况	$K(0,2)$	$K(1)$	$K(2)$
ω_2	10.00%	−10.00%	22.22%

另外两个状况不变。

3.8 对于例 3.2 的 3 个状况，有

状况	$k(1)$	$k(2)$	$k(0,2)$
ω_1	5.31%	3.39%	8.70%
ω_2	5.31%	−10.92%	−5.61%
ω_3	−5.61%	1.90%	−3.70%*

在所有的 3 种情况下，都有 $k(0,2)=k(1)+k(2)$。

3.9 假设 K 为第 3 个状况下的收益率，如果期望收益率等于 6%，则

$$\frac{1}{2}\times(-5\%)+\frac{1}{4}\times 6\%+\frac{1}{4}\times K=6\%$$

对 K 求解，解得第 3 个状况下的收益率必为 28%。

3.10 首先，计算每种状况的 $K(1)$，$K(2)$ 和 $K(0,2)$

状况	$K(1)$	$K(2)$	$K(0,2)$
ω_1	10.00%	9.09%	20.00%
ω_2	5.00%	−4.76%	0.00%
ω_3	−10.00%	11.11%	0.00%

由此得出

* 原文计算有误：$-5.61\%+1.90\%\neq-3.70\%$。——译者注

$$E(K(1)) \cong 0.25\times 10.00\% + 0.25\times 5.00\% - 0.5\times 10.00\%$$
$$\cong -1.25\%$$
$$E(K(2)) \cong 0.25\times 9.09\% - 0.25\times 4.76\% + 0.5\times 11.11\%$$
$$\cong 6.64\%$$
$$E(K(0,2)) \cong 0.25\times 20.00\% + 0.25\times 0.00\% + 0.5\times 0.00\%$$
$$\cong 5.00\%$$

显然

277

$$(1+E(K(1)))(1+E(K(2))) \cong 1.0530 \neq 1.0500 \cong 1+E(K(0,2))$$

3.11 因为季度收益率 $K(1)$，$K(2)$，$K(3)$，$K(4)$ 独立同分布，于是有

$$E(K(1)) = E(K(2)) = E(K(3)) = E(K(4))$$

且

$$1+E(K(0,3)) = (1+E(K(1)))^3$$
$$1+E(K(0,4)) = (1+E(K(1)))^4$$

因此，如果 $E(K(0,3)) = 12\%$，那么季度收益的期望 $E(K(1)) \cong 3.85\%$，年收益的期望 $E(K(0,4)) \cong 16.31\%$。

3.12 根据条件 3.1，随机变量

$$\frac{S(1)}{S(0)} = 1+K(1),\ \frac{S(2)}{S(1)} = 1+K(2),\ \frac{S(3)}{S(2)} = 1+K(3) \qquad (S.4)$$

是相互独立的，每个只取两个值 $1+d$ 或者 $1+u$，其概率分别为 p 和$1-p$。

价格 $S(2)$ 由 $S(0)$ 和前 2 个随机变量产生，对应于 4 个价格变动状况产生 4 个值，见图 3—3 中的股票价格二叉树（为简单起见，取 $S(0)=1$）。事实上，这 4 个值中只有 3 个是不相同的，即

$$S(2) = \begin{cases} S(0)(1+u)^2 & \text{概率为 } p^2 \\ S(0)(1+u)(1+d) & \text{概率为 } 2p(1-p) \\ S(0)(1+d)^2 & \text{概率为 } (1-p)^2 \end{cases}$$

价格 $S(3)$ 由 $S(0)$ 和(S.4) 中 3 个不相关的随机变量产生，对应于 8 个价格变动状况，相应地取 8 个值，见图 3—4 中的股票价格 3 时段二叉树的路径。这 8 个 $S(3)$ 的数值只有 4 个是不相同的，即

$$S(3) = \begin{cases} S(0)(1+u)^3 & \text{概率为 } p^3 \\ S(0)(1+u)^2(1+d) & \text{概率为 } 3p^2(1-p) \\ S(0)(1+u)(1+d)^2 & \text{概率为 } 3p(1-p)^2 \\ S(0)(1+d)^3 & \text{概率为 } (1-p)^3 \end{cases}$$

3.13 $S(1)$ 和 $S(2)$ 的最大值可用于计算 u，即

$$u=\frac{92-87}{87}\cong 0.0575$$

其次，由 u 和 $S(1)$ 的最大值可以计算出 $S(0)$，即

$$S(0)\cong\frac{87}{1+0.0575}\cong 82.27\ (\text{美元})$$

最后，d 可由 $S(0)$ 和 $S(1)$ 的最小值确定，即

$$d\cong\frac{76-82.27}{82.27}\cong -0.0762$$

278

3.14 给定无风险利率为 14%，时段 $\tau=\frac{1}{12}$，我们计算单期收益率

$$r=e^{\frac{0.14}{12}}-1\cong 0.0117$$

根据条件 3.2，$u>r\cong 0.0117$。这意味着，$S(2)$ 的中间值 $S(0)(1+u)(1+d)$不小于 $22(1+0.0117)(1-0.01)\cong 22.04$ 美元。

3.15 考虑方程组

$$s(0)(1+u)^2=32$$
$$s(0)(1+u)(1+d)=28$$
$$s(0)(1+d)^2=x$$

由此得出

$$\frac{32}{28}=\frac{1+u}{1+d}=\frac{28}{x}$$

解得 $x=\frac{28^2}{32}=24.50$ 美元。而重新构造出的树是不唯一的，对任意的 $S(0)>0$，我们都能够计算出 d 和 u。

3.16 u 和 d 的数值可以通过解方程组

$$s(0)(1+u)^2=121$$
$$s(0)(1+d)^2=100$$

计算出，并选择解使得 $1+u>0$，$1+d>0$。如果 $S(0)=100$，则 $u=0.1$，$d=0$。如果 $S(0)=104$，则 $u\cong 0.0786$，$d\cong -0.0194$。

3.17 我们只须考虑-1 和 r 之间的 d 值，即$-1<d<\frac{1}{10}$。当 d 在此区间内增加时，p_* 会从$\frac{11}{13}$减少到 0。p_* 和 d 的相关性如图 S—6 所示。

3.18 根据式 (3.4)，条件 $d<r<u$ 等价于$d<p_*u+(1-p_*)d<u$。这又可以写为 $0<p_*(u-d)<u-d$，等价地，$0<p_*<1$。

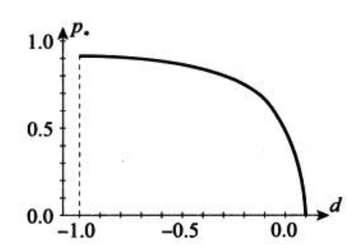


图 S—6 作为 d 的函数的风险中性概率

3.19 根据命题 3.5，有

$$E_*(S(3)|S(2)=110)=110(1+r)=110(1+0.2)=132\ (\text{美元})$$

279

3.20 根据条件 3.3，随机变量$\frac{S(1)}{S(0)}=1+K(1)$和$\frac{S(2)}{S(1)}=1+K(2)$不相关，每一个随机变量取 3 个值 $1+d$，$1+n$，$1+u$，其概率分别为 p，q，$1-p-q$，因此 $S(2)$ 是这两个随机变量和 $S(0)$ 的乘积，$S(2)$取 9 个值，它们之中仅有 6 个是不同的，即

$$S(2)=\begin{cases} S(0)(1+u)^2 & \text{概率 } p^2 \\ S(0)(1+n)^2 & \text{概率 } q^2 \\ S(0)(1+d)^2 & \text{概率}(1-p-q)^2 \\ S(0)(1+u)(1+n) & \text{概率 } 2pq \\ S(0)(1+u)(1+d) & \text{概率 } 2p(1-p-q) \\ S(0)(1+n)(1+d) & \text{概率 } 2q(1-p-q) \end{cases}$$

3.21 假设 p_*，q_*，$1-p_*-q_*$分别是价格向上、中间和向下变动的概率，从条件（3.6）可得出 $0.2p_*-0.1(1-p_*-q_*)=0$，即 $q_*=1-3p_*$，$1-p_*-q_*=2p_*$。注意到，当且仅当$p_*\in[0,1/3]$时，p_*，$1-3p_*$，$2p_*\in[0,1]$。由此可以得出，当且仅当 $q_*=1-3p_*$ 和 $p_*\in[0,1/3]$时，p_*，q_*，$1-p_*-q_*$是风险中性概率。

3.22 解方程组

$$\ln(1+u)=m\tau+\sigma\sqrt{\tau}$$
$$\ln(1+d)=m\tau-\sigma\sqrt{\tau}$$

我们计算出 $\sigma\cong 0.052$，$m\cong 0.059$。

3.23 因为 $p=\frac{1}{2}$，$\xi(n)^2=\tau$，所以有

$$E(\xi(n))=\frac{1}{2}\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sqrt{\tau}=0$$

$$\mathrm{Var}(\xi(n))=E(\xi(n)^2)-E(\xi(n))^2=\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{2}\tau=\tau$$

$$E(k(n)) = m\tau + \sigma E(\xi(n)) = m\tau$$
$$\mathrm{Var}(k(n)) = \sigma^2 \mathrm{Var}(\xi(n)) = \sigma^2 \tau$$

3.24 由式（3.2），有

$$S(1) = S(0)\mathrm{e}^{k(1)} = S(0)\mathrm{e}^{m\tau + \sigma\xi(1)}$$
$$S(2) = S(0)\mathrm{e}^{k(1)+k(2)} = S(0)\mathrm{e}^{2m\tau + \sigma(\xi(1)+\xi(2))}$$

3.25 令 $t=\frac{n}{N}$，因为 $\xi_N(i)$是不相关的，$E(\xi_N(i))=0$ 和 $\mathrm{Var}(\xi_N(i))=\frac{1}{N}$ 对每一个 $i=1，2，\cdots$都成立，于是有

$$E(w_N(t)) = E(\xi_N(1)+\cdots+\xi_N(n))$$
$$= E(\xi_N(1))+\cdots+E(\xi_N(n)) = 0$$
$$\mathrm{Var}(w_N(t)) = \mathrm{Var}(\xi_N(1)+\cdots+\xi_N(n))$$
$$= \mathrm{Var}(\xi_N(1))+\cdots+\mathrm{Var}(\xi_N(1)) = \frac{n}{N} = t$$

第 4 章

280

4.1 利用命题 4.1 证明中的公式，我们可以计算出

$$y(1) = \frac{200-35.24\times 60-24.18\times 20}{100} \cong -23.98$$
$$V(1) \cong 35.24\times 65+24.18\times 15-23.98\times 110 \cong 15.50$$
$$y(2) = \frac{15.50+40.50\times 65-10.13\times 15}{100} \cong 22.69$$
$$V(2) \cong -40.50\times 75+10.13\times 25+22.69\times 121 \cong -38.60$$

4.2 由于单期策略的可允许性减少到两个不等式 $V(0)\geqslant 0$ 和 $V(1)\geqslant 0$，则第一个不等式可以写为

$$10x+10y\geqslant 0$$

第二个不等式的含义是，随机变量 $V(1)$ 的两个值是非负的，这给出了 x，y 满足的两个不等式，即

$$13x+11y\geqslant 0$$
$$9x+11y\geqslant 0$$

满足所有这些不等式的资产组合（x，y）如图 S—7 所示。

4.3 假设存在一个自融资的可预测的策略，满足如下条件：初始值 $V(0)=0$；最终值 $0\neq V(2)\geqslant 0$，使得 $V(1)<0$ 有正的概率。不等式 $V(1)<0$的含义是，策略不是可允许的，但我们将构造一个违背无套利

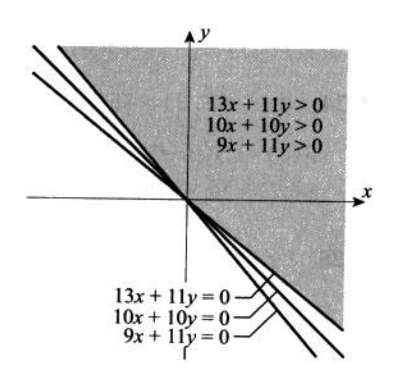


图 S—7 练习 4.2 中可允许的资产组合

原则的可允许的策略，并指出如何实现套利。

● 在时间 0 不投资；

● 在时间 1 检查策略 $V(1)$ 的价值是正还是负。如果 $V(1)\geqslant 0$，还是不投资；如果 $V(1)<0$，则取得的股票头寸与不可允许的策略相同，而无风险头寸低于不可允许的投资策略约 $-V(1)$。

281

这样就确定了一个可预测的自融资的策略，它在时间 0 和时间 1 的价值为 0，在时间 2 的价值为

$$\begin{cases} 0 & V(1)\geqslant 0 \\ V(2)-V(1)>0 & V(1)<0 \end{cases}$$

因此，这是一个可允许的策略，并实现了套利机会。

4.4 如果你知道价格上涨的股票在下一个时段价格会回落，那么你应该采取以下策略：

● 在时间 0，在两种资产上都不投资；

● 在时间 1，检查股票是上涨还是下跌。如果下跌，在两种资产上仍然不投资；但是股票继续上涨，则以 $S(0)u$ 美元卖空 1 股，投资于无风险资产。

显然，在时间 0 和时间 1，这个策略的价值是 $V(0)=V(1)=0$。如果股票在第一个时段下跌，那么在时间 2，$V(2)=0$。但如果股票在第一个时段上涨，那么它将在第二个时段下跌，$V(2)=S(0)u(r-d)$是正的，因为 $u>r>d$（这与 3.2 节是相同的）。

显然，这不是可预测的策略，这意味着没有套利机会。

4.5 (a) 如果没有卖空限制，那么如下策略将产生套利机会：

● 在时间 0，不投资；

● 在时间 1，检查价格 $S(1)$。如果 $S(1)=120$ 美元，那么仍然不投资；但如果 $S(1)=90$ 美元，卖空 1 份风险资产，将收益投资于无风险资产。

这个可允许的投资策略在时间 0 和时间 1 的价值是 0，在时间 2 的价值是

$$\begin{cases} 0 & \text{在状况 } \omega_1 \text{ 和 } \omega_2 \\ 3 & \text{在状况 } \omega_3 \end{cases}$$

这意味着产生了一个套利机会。

(b) 在 (a) 中，套利机会出现是由于在第二个时段状态 ω_2 的股票价格行为没有限制：风险资产的收益率低于无风险资产的收益率。因此，卖空风险资产将收益投资于无风险资产能够制造套利机会。而如果不允许卖空风险资产，那么投资者就不会有套利机会。

4.6 题 4.5 的解答中描述的套利策略包含分数份债券。如果 $S(1)=90$ 美元，应该卖空 1 股股票，在时间 1 购买 $\frac{9}{11}$ 份债券。为得到每个资产数量都是整数的套利机会，将这些量乘以 11，即卖空 11 股股票，买入 9 份债券。

4.7 假如买入和卖空的交易成本都为 5%。投资者采用题 4.5 解答中的策略，卖空 1 股股票。在时间 1，$S(1)=90$ 美元，投资者将会支付 $90\times 5\%=4.50$ 美元的交易成本。如果将剩余的金额 $90-4.50=85.50$ 美元投资于无风险资产，则在时间 2 财富为 $85.5\times\frac{121}{110}=94.05$ 美元。而卖空的成本为 96 美元，会使得最终财富为负，所以不存在套利策略。

282

4.8 看跌期权给出在时间 2 以施权价 $X=110$ 美元卖空 1 股股票的权利（但不是义务）。我们考虑一个有三种资产，即股票、货币市场和期权的扩展模型。这三种资产的单位价格分别为 $S(n)$，$A(n)$，$P^E(n)$，其中 $P^E(n)$ 是看跌期权在时间 $n=0,1,2$ 的市场价格。在时间 2，看跌期权的市场价格为 $P^E(2)=\max\{X-S(2),0\}$。

根据资产定价基本定理，股票和期权的折现价格 $\tilde{S}(n)=\frac{S(n)}{A(n)}$，$\tilde{P}^E(n)=\frac{P^E(n)}{A(n)}$ 在某一个风险中性概率 P_* 之下是鞅，否则将会产生套利机会。由例 4.5 我们知道，存在唯一的概率 P_* 使得 $\tilde{S}(n)$ 成为鞅。因此，$\tilde{P}^E(n)$ 在同样的概率之下是鞅。因此得出

$$P^E(1)=\frac{A(1)}{A(2)}E_*(P^E(2)\mid S(1)),P^E(0)=\frac{A(0)}{A(1)}E_*(P^E(1))$$

利用例 4.5 中计算出的每个状态的 P_* 值，我们能够计算 $P^E(1)$ 和 $P^E(0)$。例如

$$\begin{aligned} P^E(1,\omega_3) &= P^E(1,\omega_4) \\ &= \frac{A(1)}{A(2)}\frac{P_*(\omega_3)P^E(2,\omega_3)+P_*(\omega_4)P^E(2,\omega_4)}{P_*(\omega_3)+P_*(\omega_4)} \end{aligned}$$

$$=\frac{110}{121}\times\frac{\frac{1}{25}\times 20+\frac{1}{100}\times 30}{\frac{1}{25}+\frac{1}{100}}\cong 20.00\text{（美元）}$$

用同样的方法，我们有

状况	$P^E(0)$	$P^E(1)$	$P^E(2)$
ω_1	1.96	1.21	0.00
ω_2	1.96	1.21	4.00
ω_3	1.96	20.00	20.00
ω_4	1.96	20.00	30.00

第 5 章

5.1 对于第一个投资项目，有

$$E(K_1)=0.12\times 0.25+0.12\times 0.75=0.12$$
$$\mathrm{Var}(K_1)=(0.12-0.12)^2\times 0.25+(0.12-0.12)^2\times 0.75=0$$

对于第二个项目，有

$$E(K_2)=0.11\times 0.25+0.13\times 0.75=0.125$$
$$\mathrm{Var}(K_2)=(0.11-0.125)^2\times 0.25+(0.13-0.125)^2\times 0.75=0.000\,075$$

对于第三个项目，有

$$E(K_3)=0.02\times 0.25+0.22\times 0.75=0.17$$
$$\mathrm{Var}(K_3)=(0.02-0.17)^2\times 0.25+(0.22-0.17)^2\times 0.75=0.007\,5$$

由此可以看出，第一个项目风险最小，实际上是无风险的。第三个项目包含的风险最高。

283

5.2 首先我们令 $K_2(\omega_2)=x$，并计算

$$\mathrm{Var}(K_1)=0.001\,875$$
$$\mathrm{Var}(K_2)=0.187\,5x^2+0.015x+0.000\,3$$

如果 $\mathrm{Var}(K_1)=\mathrm{Var}(K_2)$，则这两个证券有同样的风险，就可以得到下面的方程

$$0.000\,3+0.187\,5x^2+0.015x=0.001\,875$$

这个方程有两个解 $x=-0.14$ 或 0.06。这意味着，$K_2(\omega_2)=-14\%$或者 6%。

5.3 首先我们利用公式 $e^{k_i}=1+K_i$，$i=1, 2$，计算对数收益率，然后计算出每一个收益率的方差，即

状况	概率	K_1	K_2	k_1	k_2
ω_1	0.5	10.53%	7.23%	10.01%	6.98%
ω_2	0.5	13.89%	10.55%	13.01%	10.03%
方差		0.000 282	0.000 276	0.000 224	0.000 232

从中可知，$\mathrm{Var}(K_1)>\mathrm{Var}(K_2)$；$\mathrm{Var}(k_1)<\mathrm{Var}(k_2)$。

这是一个很有意思的结论，因为这个结论表明，用 $\mathrm{Var}(K)$ 测度风险较大者，在 $\mathrm{Var}(k)$ 意义下的风险不一定较大。尽管如此，当收益率大约在 10%或者更低时，这两测度的差距会很小，在金融实践中可以忽略。这是因为参数（概率和不同状态下的收益率）的不准确的估计产生的误差比这个差距更大。

5.4 假设 x_1 和 x_2 是在资产组合中的类型 1 和类型 2 股票的数量，则

$$V(1)=x_1S_1(1)+x_2S_2(1)=V(0)\left(w_1\frac{S_1(1)}{S_1(0)}+w_2\frac{S_2(1)}{S_2(0)}\right)$$
$$=100\left(0.25\times\frac{48}{45}+0.75\times\frac{32}{33}\right)=99.394$$

5.5 资产组合的收益率是 $K_V=w_1K_1+w_2K_2$。于是有

$$K_V=0.30\times12\%-0.7\times4\%=0.8\% \quad 在状况\ \omega_1$$
$$K_V=0.30\times10\%+0.7\times7\%=7.9\% \quad 在状况\ \omega_2$$

5.6 资产组合的初始值和最终值为

$$V(0)=x_1S_1(0)+x_2S_2(0)$$
$$V(1)=x_1S_1(0)e^{k_1}+x_2S_2(0)e^{k_2}$$
$$=V(0)(w_1e^{k_1}+w_2e^{k_2})$$

因此，资产组合的收益率为

$$e^{k_V}=\frac{V(1)}{V(0)}=w_1e^{k_1}+w_2e^{k_2}$$

284

5.7 首先我们计算出 $E(K_1)=7\%$和 $E(K_2)=23\%$。如果资产组合的期望收益 $E(K_V)=20\%$，那么由式（5.4）和式（5.1），权重满足如下的方程组，即

$$7w_1+23w_2=20$$
$$w_1+w_2=1$$

方程组的解为 $w_1=18.75\%$，$w_2=81.25\%$。

5.8 首先我们从例 5.6 的数据计算出 $\mu_1=4\%$，$\mu_2=16\%$。其次由式（5.7）和式（5.1）得到权重 w_1 和 w_2 满足的方程组

$$4w_1+14w_2=46$$
$$w_1+w_2=1$$

方程组的解为 $w_1=-3.2$，$w_2=4.2$。最后，由例 5.6 计算出来的 $\sigma_1^2\cong 0.018\,4$，$\sigma_2^2\cong 0.002\,4$ 和 $\rho_{12}\cong -0.963\,09$，用式（5.7）就可以计算出资产组合的方差：

$$\begin{aligned}\sigma_V^2 &\cong (-3.2)^2\times 0.018\,4+(4.2)^2\times 0.002\,4\\ &\quad +2\times(-3.2)\times 4.2\times(-0.963\,09)\times\sqrt{0.018\,4}\\ &\quad \times\sqrt{0.002\,4}\cong 0.402\,78\end{aligned}$$

5.9 风险证券的收益是非常数随机变量，即 $K_1(\omega_1)\neq K_1(\omega_2)$ 和 $K_2(\omega_1)\neq K_2(\omega_2)$。据此，方程组

$$K_1(\omega_1)=aK_2(\omega_1)+b$$
$$K_1(\omega_2)=aK_2(\omega_2)+b$$

必有解 $a\neq 0$ 和 b。由此得出 $K_1=aK_2+b$。

现在，利用协方差和方差的性质计算出

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(K_1, K_2) &= \mathrm{Cov}(aK_2+b, K_2)=a\mathrm{Cov}(K_2, K_2)\\ &= a\mathrm{Var}(K_2)=a\sigma_2^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 &= \mathrm{Var}(K_1)=\mathrm{Var}(aK_2+b)=a^2\mathrm{Var}(K_2)\\ &= a^2\sigma_2^2\end{aligned}$$

由此得出 $\sigma_1=|a|\sigma_2$，并且

$$\rho_{12}=\frac{\mathrm{Cov}(K_1, K_2)}{\sigma_1\sigma_2}=\frac{a\sigma_2^2}{|a|\sigma_2^2}=\pm 1$$

5.10 利用在例 5.6 中计算出的 $\sigma_1^2\cong 0.018\,4$，$\sigma_2^2\cong 0.002\,4$ 和 $\rho_{12}\cong -0.963\,09$，我们用式（5.13）计算 s_0，于是有

$$s_0=\frac{\sigma_1^2-\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}\cong 0.738\,09$$

这意味着，具有最小风险的资产组合的权重是 $w_1=0.738\,09$ 和 $w_2=0.261\,91$，这个资产组合不包含卖空。

5.11 $\mu_V=0.06$，$\sigma_V\cong 1.013$。

5.12 三个证券的最小方差资产组合的权重 $w\cong[0.314\quad 0.148\quad 0.538]$；资产组合的期望收益 $\mu_V\cong 0.173$，标准差 $\sigma_V\cong 0.151$。

5.13 在期望收益 $\mu_V=20\%$的所有可达资产组合中，方差最小的资

产组合权重是 $w \cong [0.672 \quad -0.246 \quad 0.574]$；这个资产组合的标准差$\sigma_V \cong 0.192$。

5.14 取期望收益 μ_V 作为参数，沿着最小方差线，资产组合的权重和标准差为

$$w \cong [-2.027+13.492\mu_V \quad 2.728-14.870\mu_V \quad 0.298+1.376\mu_V]$$
$$\sigma_V = \sqrt{0.625-6.946\mu_V+20.018\mu_V^2}$$

最小方差线如图 S—8 所示，在可达资产组合集合中浅色阴影部分存在卖空，深色阴影部分不允许卖空。

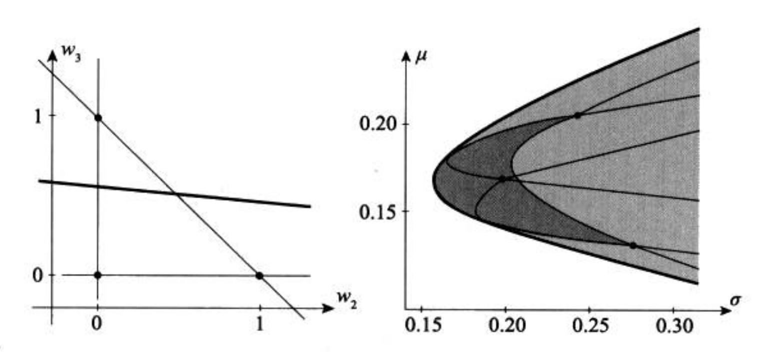


图 S—8 在 w_2，w_3 平面上和 σ，μ 平面上的最小方差线和可达资产组合

5.15 假设 $\boldsymbol{m}$ 是三个证券的期望收益构成的一行矩阵，等式 $\gamma \boldsymbol{wC} = \boldsymbol{m} - \mu \boldsymbol{u}$ 分别用 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{u}^T$ 和 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{m}^T$ 乘，因为 $\boldsymbol{wu}^T = 1$ 和 $\boldsymbol{wm}^T = \mu_V$，于是有

$$\mu_V(\boldsymbol{m}-\mu\boldsymbol{u})\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{u}^T = (\boldsymbol{m}-\mu\boldsymbol{u})\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{m}^T$$

对 μ 求解，有

$$\mu = \frac{\boldsymbol{mC}^{-1}(\boldsymbol{m}^T - \mu_V\boldsymbol{u}^T)}{\boldsymbol{uC}^{-1}(\boldsymbol{m}^T - \mu_V\boldsymbol{u}^T)} \cong 0.142$$

然后，计算出 γ：

$$\gamma = (\boldsymbol{m}-\mu\boldsymbol{u})\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{u}^T \cong 1.367$$

5.16 市场资产组合的权重 $w \cong [0.438 \quad 0.012 \quad 0.550]$。市场资产组合的期望收益 $\mu_M \cong 0.183$，标准差 $\sigma_M \cong 0.156$。

5.17 $\beta_V \cong 0.857$，$\alpha_V \cong -0.102$。

286

5.18 资产组合的收益可借助于各证券的收益表示为

$$K_V = w_1 K_1 + \cdots + w_n K_n$$

因为协方差对每个变量是线性的，于是有

$$\beta_V = \frac{\text{Cov}(K_V, K_M)}{\sigma_M^2} = w_1 \frac{\text{Cov}(K_1, K_M)}{\sigma_M^2} + \cdots + w_n \frac{\text{Cov}(K_n, K_M)}{\sigma_M^2}$$
$$= w_1\beta_1 + \cdots + w_n\beta_n$$

5.19 特征线的方程是 $y=\beta_V x+\alpha_V$，其中 β_V 证券的贝塔因子 $\alpha_V=\mu_V-\beta_V\mu_M$。在资本资产定价模型中，证券市场线的方程 $\mu_V=r_F+(\mu_M-r_F)\beta_V$ 成立。代入 α_V 的公式有 $\alpha_V=r_F-r_F\beta_V$，于是证券特征线的方程变为$y=\beta_V(x-r_F)+r_F$。显然，任意证券的特征线均通过坐标为（r_F，r_F）的点。

第 6 章

6.1 是，存在套利机会。我们签订远期合约多头头寸并卖空 1 股股票。将所得收益的 70%以 8%的利率投资于无风险资产。剩余的 30%支付证券保证金，得到 4%利息。在交割时，现金投资加上利息大约为 18.20 美元，结清空头须支付 18 美元，剩下的 0.20 美元是套利利润。

如果证券的保证金利率 d 使得套利机会不存在，此时 d 满足 $30\%\times 17\times e^{d}+70\%\times 17\times e^{8\%}\leqslant 18$。最高的 $d\cong 0.1740\%$。

6.2 我们取 2000 年 1 月作为时间 0，根据式（6.2），有

$$F\left(0, \frac{3}{4}\right)=S(0)e^{0.06\times\frac{3}{4}},\ F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)=0.9S(0)e^{0.06\times\frac{2}{4}}$$

由此可以得出远期价格下跌大约

$$\frac{F\left(0, \frac{3}{4}\right)-F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)}{F\left(0, \frac{3}{4}\right)}=\frac{e^{\frac{3}{4}\times 6\%}-0.9e^{\frac{1}{2}\times 6\%}}{e^{\frac{3}{4}\times 6\%}}\cong 11.34\%$$

6.3 红利的现值为

$$\text{div}_0=1e^{-\frac{6}{12}\times 12\%}+2e^{-\frac{9}{12}\times 12\%}\cong 2.77\text{（美元）}$$

式（6.4）的右边等于

$$[S(0)-\text{div}_0]e^{rT}\cong(120-2.77)e^{\frac{10}{12}\times 12\%}\cong 129.56\text{（美元）}$$

小于远期价格 131 美元，因此，存在套利机会，实现如下：

- 2000 年 1 月 1 日，签订远期合约空头头寸，并借入 120 美元买入股票；
- 2000 年 7 月 1 日，得到第 1 笔红利 1 美元并进行无风险投资；

● 2000 年 10 月 1 日，得到第 2 笔红利 2 美元，并进行无风险投资；

● 2000 年 11 月 1 日，结清所有头寸。

287 于是可以得到套利利润

$$131-120e^{\frac{10}{12}\times 12\%}+1e^{\frac{4}{12}\times 12\%}+2e^{\frac{1}{12}\times 12\%}\cong 1.44\text{（美元）}$$

6.4 在这些情况下，没有套利利润。尽管无套利远期的理论价格大约为 87.83 美元，在定理 6.2 的证明中，第一个策略造成的损失为 $89-83e^{10\%}+2e^{0.5\times 7\%}\cong -0.66$ 美元；第二个策略的损失为 $-89+83e^{7\%}-2e^{0.5\times 10\%}\cong -2.08$ 美元。

6.5 欧元起着具有 3%红利收益的标的资产的作用，因此，远期价格（汇率）为

$$F\left(0,\ \frac{1}{2}\right)=0.983\,4e^{0.5(4\%-3\%)}\cong 0.988\,3$$

即 0.988 3 欧元兑换 1 美元。

6.6 在时间 t

● 借入并支付（或者收到和投资，如果是负的）金额 $V(t)$ 给远期合约空头头寸的购买方，远期价格为 $F(0,\ T)$，交割日为 T；

● 签订新的远期合约多头头寸，远期价格为 $F(t,\ T)$，没有成本。

然后在时间 T

● 结清两个远期合约，分别收到（或支付，如果是负的）金额 $S(T)-F(0,\ T)$ 和 $S(T)-F(t,\ T)$；

● 从无风险投资中得到 $V(t)e^{r(T-t)}$。

最终的余额 $V(t)e^{r(T-t)}-[F(t,\ T)-F(0,\ T)]>0$ 是套利利润。

6.7 根据式（6.3），初始的远期价格为 $F(0,\ 1)\cong 45.72$ 美元，这考虑到了在时间 $\frac{1}{2}$ 支付的红利。

(a) 如果 $S\left(\frac{9}{12}\right)=49$ 美元，则根据式（6.2），$F\left(\frac{9}{12},\ 1\right)\cong 49.74$ 美元。根据式（6.8）有 $V\left(\frac{9}{12}\right)\cong 3.96$ 美元。

(b) 如果 $S\left(\frac{9}{12}\right)=51$ 美元，则 $F\left(\frac{9}{12}\right)\cong 51.77$ 美元，$V\left(\frac{9}{12}\right)\cong 5.96$ 美元。

6.8 假设 $t=\frac{1}{365}$，$T=\frac{1}{4}$，应用式（6.11），有

$$f(t,\ T)-f(0,\ T)=S(t)e^{r(T-t)}-S(0)e^{rT}=0^{*}$$

如果 $S(t)=S(0)e^{rT}$，即如果股票价格按无风险收益率增长时。

* 此式原文有误，第一个等号后的式中的“－”号，在原文中为“＋”号。——译者注

6.9 因为 $f(t, T)=S(t)e^{r(T-t)}$，随机变量 $S(t)$ 和 $f(t, T)$ 完全正相关。$\rho_{S(t)f(t,T)}=1$ 并且 $\sigma_{f(t,T)}=e^{r(T-t)}\sigma_{S(t)}$，由此得出 $N=e^{-r(T-t)}$。

6.10 考察关于远期和期货价格相等的定理 6.5，并应用于具有连续支付红利的资产。因此，我们利用式（6.6），有

288

$$r_{div}=8\%-\frac{1}{0.75}\ln\frac{14\ 100}{13\ 500}\cong 2.20\%$$

6.11 指数的收益率为 3.37%。当 $r_F=1\%$时，期货价格 $f(0.3)\cong 916.97$，$f(1.3)\cong 938.49$。如果资产组合的 β 系数 $\beta_V=1.5$，那么资产组合的期望收益 $\mu_V\cong 4.56\%$。为构造资产组合使得 $\beta_{\tilde{V}}=0$ 并且初始价格 $V(0)=100$ 美元，原来的资产组合需要追加 $N\cong 0.165\ 2$ 份期货合约空头（注意，N 与例 6.4 中的相同）。

如果原来的资产组合在第一个时段的年收益等于期望收益，则它在一个时段以后的值 $V(1)\cong 104.56$ 美元。对于 $N\cong 0.165\ 2$ 份期货合约空头头寸的持有者，盯市须支付 3.56 美元，因此一个时段以后，有期货合约的资产组合的价值 $\tilde{V}(1)\cong 104.56-3.56=101.00$ 美元，仍然符合无风险增长。

第 7 章

7.1 投资产生的利润为

$$(36-S(T))^+-4.50e^{0.12\times\frac{3}{12}}=3$$

式中，$S(T)$ 为施权日的股票价格，于是有 $S(T)\cong 28.36$ 美元。

7.2 $E((S(T)-90)^+-8e^{0.09\times\frac{6}{12}})\cong -5.37$ 美元。

7.3 根据看跌期权—看涨期权的平价公式，$2.83-P^E=15.60-15.00e^{-\frac{3}{12}\times 0.067\ 2}$，于是有 $p^E\cong 1.98$ 美元。

7.4 违背看跌期权—看涨期权平价，$5.09-7.78>20.37-24e^{-0.074\ 8\times\frac{6}{12}}$。与定理 7.1 的证明的第一部分一样就能实现套利：

- 以 20.37 美元买入 1 股股票；
- 以 7.78 美元买入 1 份看跌期权；
- 卖空看涨期权得到 5.09 美元；
- 以利率 7.48% 借入 23.06 美元。

这些交易的余额为 0。6 个月以后

- 利用看跌期权或者结清看涨期权的空头以 24 美元卖空 1 股，取决于股价是低于还是高于施权价；

● 归还贷款及利息，余额为 $23.06e^{\frac{1}{2}\times 0.0748}\cong 23.94$ 美元。

余额 $24-23.96=0.06$ 美元是套利利润。

7.5 如果 $C^E-P^E>S(0)-\mathrm{div}_0-Xe^{-rT}$，那么在时间 0 买入 1 股股票和 1 份看跌期权，卖空 1 份看涨期权。将余额投资（或者借入，如果是负的）于货币市场，利率为 r。收到红利立即将其以利率 r 投资，在交割日 T 终止货币市场投资，以价格 X 卖空股票，如果 $S(T)<X$，施权看跌期权；如果 $S(T)\geqslant X$，行使看涨期权。最后的余额 $(C^E-P^E-S(0)+\mathrm{div}_0)e^{rT}+X>0$ 为套利利润。

另一方面，如果 $C^E-P^E<S(0)-\mathrm{div}_0-Xe^{-rT}$，则在时间 0 卖空 1 股股票，卖空 1 份看跌期权，买入 1 份看涨期权，将余额投资于货币市场。当卖空的股票支付红利时，借入同样的金额支付给股票的所有者。在时间 T，结清货币市场头寸，以价格 X 买入 1 股股票，如果 $S(T)>X$，施权看涨期权；如果 $S(T)\leqslant X$，则行使看跌期权，结清股票的空头头寸。套利利润为 $(-C^E+P^E+S(0)-\mathrm{div}_0)e^{rT}-X>0$。

289

7.6 如果 $C^E-P^E<S(0)e^{-r_{\mathrm{div}}T}-Xe^{-rT}$，则在时间 0 卖空 $e^{-r_{\mathrm{div}}T}$ 股，卖空看跌期权，买入看涨期权，将金额以利率 r 投资。在时间 0 和时间 T 之间做空股票，筹集现金，支付红利给股票的所有者，这将导致时间 T 持有 1 股空头股票。如果看跌期权被施权，以价格 X 买入 1 股股票。利用这个股份结清股票的空头头寸。你将持有 1 份看涨期权和正的金额 $(-C^E+P^E+S(0)e^{-r_{\mathrm{div}}T}-Xe^{-rT})e^{rT}>0$；如果看跌期权没有被施权，就可以利用看涨期权，在时间 T 以价格 X 买入 1 股股票，结清股票的空头。你仍将持有正的最终余额 $(-C^E+P^E+S(0)e^{-r_{\mathrm{div}}T}-Xe^{-rT})e^{rT}>0$。

另一方面，如果 $C^E-P^E>S(0)e^{-r_{\mathrm{div}}T}-Xe^{-rT}$，那么相反的策略将产生套利机会。

7.7 施权价等于在练习 6.5 的解答中计算出的远期价格（更精确地是汇率），为 0.988 3 欧元兑换 1 美元。

7.8 如果 $S(0)-Xe^{-rT}<C^A-P^A$，则卖出 1 份看涨期权，买入 1 份看跌期权，买入 1 股股票，将余额以利率 r 投资（或者借入，如果余额是负的）。现在的论证与定理 7.2 证明的第一部分相同，只是如果看涨期权在红利付出后施权，套利利润应该包含红利。（而红利不可能包含在不等式中，因为期权可以被施权，在红利支付以前卖出的股份。）

如果 $C^A-P^A<S(0)-\mathrm{div}_0-X$，则在时间 0 卖空 1 股股票，卖出 1 份看跌期权，买入 1 份看涨期权，余额以利率 r 投资。如果看跌期权在时间 $t<T$ 施权，你必须以价格 X 买入 1 股股票，以利率 r 借入相同的金额。当发放红利时，以无风险利率借入相同的金额，支付给股票的所有者，在时间 T 将股份归还给所有者，结清空头。最后你将持有看涨期权和正的金额 $(S(0)+P^A-C^A-\mathrm{div}_0)e^{rT}-Xe^{r(T-t)}>Xe^{rT}-Xe^{r(T-t)}\geqslant 0$。（如果看跌期权在红利付给前施权，立即结清空头，就可以增加套利利

润，在这种情况下，不必支付红利。）如果在到期日 T 之前不施权，可应用练习 7.5 解答的第二部分。

7.9 如果 $S(0)-Xe^{-rT}<C^{A}-P^{A}$，则利用与定理 7.2 证明第一部分相同的策略。其结果是，套利利润在事实上会由于红利累积到看涨期权施权前而增加。

如果 $C^{A}-P^{A}<S(0)e^{-r_{div}T}-X$，那么在时间 0 卖空 $e^{-r_{div}T}$股股票，卖出 1 份看跌期权，买入 1 份看涨期权，将余额以利率 r 进行无风险投资。在时间 0 和时间 T 之间支付红利给股票的所有者，利用卖空股票的现金支付。这将导致在时间 T 持有空头股票。如果看跌期权在时间 $t\leqslant T$ 施权，则以价格 X 买入 1 股股票，以无风险利率借入这个金额。在时间 T，将这 1 股股票用于结清股票空头头寸。你将持有看涨期权和正的金额 $(-C^{A}+P^{A}+S(0)e^{-r_{div}T})e^{rT}-Xe^{r(T-t)}\geqslant(-C^{A}+P^{A}+S(0)e^{-r_{div}T}-X)e^{rT}>0$ 加上累计的红利，因为股份在时间 t 已经购买。如果看跌期权一直没施权，你可以在时间 T 利用看涨期权以价格 X 买入 1 股股票，结清股票空头。你最终将持有正的余额 $(-C^{A}+P^{A}+S(0)e^{-r_{div}T})e^{rT}-X>(-C^{A}+P^{A}+S(0)e^{-r_{div}T}-X)e^{rT}>0$。

7.10 如果 $C^{E}>C^{A}$，那么卖出欧式看涨期权，买入美式看涨期权，$C^{E}-C^{A}$ 将是你的套利收入。为保持这个数值，美式期权在到期日之前不施权，这时或者两个期权毫无价值，或者来自欧式期权的损失可利用美式期权弥补。对看跌期权的论证是相同的。

290

7.11 假设 $C^{E}\geqslant S(0)-div_0$。在这种情况下，卖出看涨期权，买入股票，将余额投资于货币市场。一收到红利就将其投资于货币市场。在施权日，以 $\min(S(T),X)$的价格卖出股票，结清看涨期权。你的最终财富将是正的，即 $(C^{E}-S(0)+div_0)e^{rT}+\min(S(T),X)>0$，这样就证明了 $C^{E}<S(0)-div_0$。

余下的边界可由支付红利的股票的看跌期权—看涨期权平价关系式 (7.5) 计算出：$S(0)-div_0-Xe^{-rT}\leqslant C^{E}$，因为 $P^{E}\geqslant 0$；$-S(0)+div_0+Xe^{-rT}\leqslant P^{E}$，因为 $C^{E}\geqslant 0$；$P^{E}<Xe^{-rT}$，因为 $C^{E}<S(0)-div_0$。

7.12 在命题 7.3 中，由看涨期权和看跌期权价格边界确定的区域如图 S—9 所示。

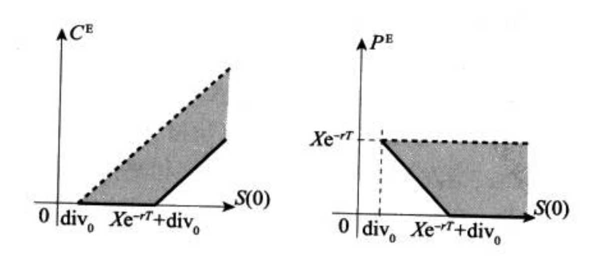


图 S—9 支付红利的股票的看涨期权和看跌期权价格的边界

7.13 如果 $C^A \geqslant S(0)$，则买入 1 股股票，卖出 1 份看涨期权，将余额 $C^A - S(0)$进行无风险投资。如果期权在到期日或者以前施权，则以价格 X 卖出股份结清义务。如果期权一直没施权，在到期日你将有 1 股股票的财富 $S(T)$。在这两种情况下，这个策略的最终价值均为正。最终的余额实际上还包含收到的红利，除非在支付红利之前施权。

7.14 假设 $X' < X''$，但 $C^E(X') < C^E(X'')$。我们可以卖出施权价为 X''的看涨期权，买入施权价为 X'的看涨期权，将 $C^E(X'') - C^E(X') > 0$ 进行无风险投资。如果施权价为 X''的期权在到期日被施权，需要支付 $(S(T) - X'')^+$。这个金额可以通过行使施权价为 X'的看涨期权的回报 $(S(T) - X')^+$ 支付。因为 $X' < X''$，于是$(S(T) - X')^+ \geqslant (S(T) - X'')^+$，将实现套利利润。

利用类似的论证可以得出看跌期权的不等式。

7.15 考虑 4 种情况：

(1) 如果 $S(T) \leqslant X' < X < X''$，则式 (7.9) 简化为 $0 \leqslant 0$。

(2) 如果 $X' < S(T) \leqslant X < X''$，则式 (7.9) 变成 $0 \leqslant \alpha(S(T) - X')$，显然满足 $X' < S(T)$ 。

(3) 如果 $X' < X < S(T) \leqslant X''$，则可将式 (7.9) 写为 $S(T) - X \leqslant \alpha(S(T) - X')$，这个式子成立是因为 $X = \alpha X' + (1-\alpha)X''$和 $S(T) \leqslant X''$。

291 (4) 如果 $X' < X < X'' < S(T)$，那么式 (7.9) 就变成了下面的等式 $S(T) - X = \alpha(S(T) - X') + (1-\alpha)(S(T) - X'')$，这是因为$X = \alpha X' + (1-\alpha)X''$。

7.16 假设 $P^E(S') < P^E(S'')$ 对某个 $S' < S''$成立，其中 $S' = x'S(0)$，$S'' = x''S(0)$。卖出 1 份由 x''股份构成的资产组合的看涨期权，买入由 x'股份构成的资产组合的看跌期权，将余额 $P^E(S'') - P^E(S') > 0$ 进行无风险投资。如果卖出的期权在时间 T 施权，那么施权另一个期权履行义务。因为 $x' < x''$，回报满足$(X - x'S(T))^+ \geqslant (X - x''S(T))^+$，由此得出这是一个套利策略。

7.17 假设 $X' < X''$但 $C^A(X') > C^A(X'')$。我们可以卖出施权价为X''的看涨期权，买入施权价为 X'的看涨期权，将余额 $C^A(X'') - C^A(X') > 0$ 进行无风险投资。如果卖出的期权在时间 $t \leqslant T$ 被执行，我们必须支付 $(S(t) - X'')^+$，这可以通过立即施权另一个期权的回报$(S(t) - X')^+$偿还。因为$(S(t) - X'')^+ \leqslant (S(t) - X')^+$，该策略将产生套利。

看跌期权的不等式可以利用类似的方式证明。

7.18 我们对美式看跌期权证明命题 7.19，这与对欧式期权的论证类似。根据命题 7.15，$P^A(S)$为 S 的减函数。当 $S \geqslant X$ 时，看跌期权的内在价值为零，于是时间价值 $P^A(S)$ 也是 S 的减函数。另一方面，根据命题 7.16，$P^A(S') - P^A(S'') \leqslant S'' - S'$对任意的 $S' < S''$成立。这暗含如

果$S'<S''\leqslant X$，则 $P^{A}(S')-(X-S')^{+}\leqslant P^{A}(S'')-(X-S'')^{+}$。于是，当 $S\leqslant X$ 时，时间价值是 S 的减函数。因此，当 $S=X$ 时，时间价值达到最大值。

第 8 章

8.1 我们现在计算看涨期权价格 $C^{E}(0)$ 对 u 的导数。假设 $S^{d}<X<S^{u}$，则价格公式为

$$C^{E}(0)=\frac{1}{1+r}\frac{r-d}{u-d}[S(0)(1+u)-X]$$

对 u 的导数等于

$$\frac{(r-d)[X-S(0)(1+d)]}{(1+r)(u-d)^{2}}=\frac{(r-d)[X-S^{d}]}{(1+r)(u-d)^{2}}$$

因为 $r>d$，$X>S^{d}$，导数是正的，于是 $C^{E}(0)$ 为 u 的增函数。

$C^{E}(0)$ 对 d 的导数等于

$$-\frac{(u-r)[S(0)(1+u)-X]}{(1+r)(u-d)^{2}}=-\frac{(u-r)[S^{u}-X]}{(1+r)(u-d)^{2}}$$

因为 $r<d$ 和 $X<S^{u}$，导数是负的，期权价格是 d 的减函数。

292

8.2 如果 $r=0$，$s(0)=X=1$，则 $C^{E}(0)=\frac{-ud}{u-d}$。当 $u=0.05$，$d=-0.05$时，有 $u-d=0.1$；$C^{E}(0)=0.025$ 美元。如果 $u=0.01$；$d=-0.19$，则 $u-d=0.2$。股票收益的方差等于$(u-d)^{2}p(1-p)$，后者更高，但期权价格更低，$C^{E}(0)=0.009\ 5$ 美元。

8.3 为复制看涨期权，卖者在开始时需要买入股票，并且在期权施权时卖出。为计算用于复制的资产组合，需要解如下的方程组：

$$\begin{cases}110(1-c)x+1.05y=10\\90(1-c)x+1.05y=0\end{cases}$$

当 $c=2\%$时，我们得到 $x\cong 0.510\ 2$；$y\cong -42.847\ 1$；用于复制的资产组合的初始价值是 $100x+y\cong 8.163\ 3$ 美元。如果 $c=0$，用于复制的资产组合价值为 7.142 9 美元。注意，货币市场头寸 y 对每个 c 是相同的。

8.4 为复制看涨期权，应利用借款利率，因为货币市场头寸是负的，于是有 $x(1)\cong 0.666\ 7$；$y(1)\cong -40.178\ 6$。因此，用于复制的资产

组合的价值为 9.821 4 美元。利用存款利率，对于看跌期权，我们有 $x(1)\cong-0.3333$；$y(1)\cong 27.7778$。于是，用于复制的资产组合的初始价值为 2.777 8 美元。

这个结果与从式（8.3）得到的结果一致，合适的风险中性概率（利用相应的利率计算的）对于看涨期权，有 $p_*\cong 0.7333$；对于看跌期权，有 $p_*\cong 0.6$。

8.5 期权在时间 0 的价格为 22.92 美元。除了这个金额之外，期权的卖出者应借款 74.05 美元，并且买入 0.808 1 股股票。在时间 1，如果 $S(1)=144$，那么持有的股票数量应该增加到 1 股，利用追加借款 27.64 美元融资购买，应付的货币总量为 109.09 美元。另一方面，如果在时间 1；$S(1)=108$ 美元，应卖出股票，使得持有股票数量减少到 0.296 3 股，应归还 55.27 美元，应付的金额减少到 26.18 美元。（无论在哪种情况下，在时间 1 的应付金额都包括在时间 0 借入金额的利息 7.40 美元。）

8.6 在时间 1，股票价格 $S^u=144$ 美元，$S^d=108$ 美元（即包含红利的价格）由于支付红利减少到 129 美元和 93 美元（即除净红利的价格）。这些价格产生时间 2 的价格，因此，$S^{uu}=154.80$ 美元；$S^{ud}=116.10$ 美元；$S^{du}=111.60$ 美元；$S^{dd}=83.70$ 美元。如果股票两次上涨，期权施权得到回报为 34.80 美元，其余情况回报为零。期权在时间 1 的价值在上涨状态为 21.09 美元；在下跌状态为零。在时间 1 复制资产组合，根据除净红利的价格，上涨状态由 0.899 2 股和 94.91 美元贷款构成；在下跌状态，没有股份，也没有货币市场头寸。期权在时间 0 的价格为 12.78 美元。复制（根据时间 1 的包含红利的价格，因为红利对在时间 0 购买股票的股票所有者有效）包含买入 0.585 9 股股票和借款 57.52 美元。

8.7 由考克斯-罗斯-鲁宾斯坦公式，有 $C^E(0)\cong 5.93$ 美元，$P^E(0)\cong 7.76$美元。

8.8 使得 $S(0)(1+u)^m(1+d)^{N-m}>X$ 的最小整数 $m=35$，由考克斯-罗斯-鲁宾斯坦公式，我们有 $C^E(0)\cong 3.4661$ 美元，$x(1)=[1-\Phi(m-1,N,q)]\cong 0.85196$ 股。

293

8.9 在第一个使得期权的价值与下一次股票价格上涨还是下跌无关的时期 n，即 $S(0)(1+u)^n(1+d)>X$（在这种情况下，$S(0)(1+u)^{n+1}>X$ 也成立）时，欧式看涨期权的德尔塔等于 1，于是有

$$n>\frac{\ln X-\ln S(0)-\ln(1+d)}{\ln(1+u)}$$

8.10 股票的价值为

n	0	1	2	3
				79.86
			72.60 <	
		66.00 <		68.97
$S(n)$	60.00 <		62.70 <	
		57.00 <		59.57
			54.15 <	
				51.44

美式看跌期权的价值为

n	0	1	2	3
				0.00
			0.00 <	
		0.50 <		0.00
$P^{A}(n)$	2.52 <		1.10 <	
		5.00 <		2.43
			7.85 <	
				10.56

期权将在时间 1 的节点 d，或者在时间 2 的节点 dd 施权（粗黑体数字）。

8.11 欧式看涨期权和美式看涨期权的价值相同，即

n	0	1	2
			52.80
		34.91 <	
$C^{E}(n)=C^{A}(n)$	22.92 <		9.60
		5.82 <	
			0.00

当然，在时间 2，这两个期权的回报相同。在时间 1，在上涨状态，美式看涨期权不会被施权，这时的价值仅为 24 美元，小于持有到到期日。在下跌状态，美式看涨期权没有价值，也不施权。类似地，在时间 0，也不施权。因此，美式看涨期权等价于欧式看涨期权。

8.12 除净红利的股票价格为

n	0	1	2
			12.32
		11.20 <	
$S(n)$ 除净红利	12.00 /		10.64
	\		10.34
		9.40 <	
			8.93

相应的欧式看跌期权和美式看跌期权的价格为

n	0	1	2
			1.68
			1.68
		2.53	
		2.80	
			3.36
			3.36
$P^{E}(n)$	3.42		
$P^{A}(n)$	3.69		
			3.66
			3.66
		4.33	
		4.60	
			5.07
			5.07

在时间 1，美式看跌期权的回报在上涨和下跌两个状态都高于持有期权至到期日的价值，于是期权在这些状态施权（用粗黑体数字标出）。

8.13 取 b 使得 $S(0)e^{\sigma b+mu-\frac{1}{2}\sigma^2 u}=a$，令 $V(t)=W(t)+\left(m-r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{t}{\sigma}$，对任意的 $t\geqslant 0$，它在 P_* 之下是维纳过程。特别地，$V(u)$ 在 P_* 之下服从均值为 0，方差为 u 的正态分布。因此式（8.8）右端等于

$$
\begin{aligned}
E_*(\mathrm{e}^{-ru}S(u)1_{S(u)<a}) &= S(0)E_*(\mathrm{e}^{\sigma V(u)-\frac{1}{2}\sigma^2 u}1_{V(u)<b}) \\
&= S(0)\int_{-\infty}^{b}\mathrm{e}^{\sigma x-\frac{1}{2}\sigma^2 u}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2u}}\,\mathrm{d}x \\
&= S(0)\int_{-\infty}^{b}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\sigma u)^2}{2u}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

现在看出，因为在 P_* 之下 $V(t)$ 为维纳过程，随机变量 $V(u)$ 和 $V(t)-V(u)$ 是相互独立的，服从均值为 0，方差分别为 u 和 $t-u$ 的正态分布。因此，联合密度函数为 $\frac{1}{2\pi t}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2(t-u)}-\frac{x^2}{2u}}$。这样就可以计算式（8.8）的左端，即

$$
\begin{aligned}
E_*(\mathrm{e}^{-rt}S(t)1_{S(u)<a}) &= S(0)E_*(\mathrm{e}^{\sigma V(t)-\frac{1}{2}\sigma^2 u}1_{V(u)<b}) \\
&= S(0)E_*(\mathrm{e}^{\sigma(V(t)-V(u))+\sigma V(u)-\frac{1}{2}\sigma^2 u}1_{V(u)<b}) \\
&= S(0)\int_{-\infty}^{b}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\sigma y+\sigma x-\frac{1}{2}\sigma^2 t}\,\frac{1}{2\pi t}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2(t-u)}-\frac{x^2}{2u}}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= S(0)\int_{-\infty}^{b}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi t}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\sigma(t-u))^2}{2(t-u)}-\frac{(x-\sigma u)^2}{2u}}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= S(0)\int_{-\infty}^{b}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\sigma u)^2}{2u}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

295 我们现在可看出，式(8.8)两边相等。

8.14 考虑分布函数

$$F(x)=P_*\{W(t)<x\}=P_*\left\{V(t)<x+\left(m-r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{t}{\sigma}\right\}$$
$$=\int_{-\infty}^{x+\left(m-r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{t}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y$$

其中，$V(t)=W(t)+(m-r+\frac{1}{2}\sigma^2)\frac{t}{\sigma}$在$P_*$之下服从正态分布，因此，在$P_*$之下$W(t)$的密度函数为

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(x+(m-r+\frac{1}{2}\sigma^2)\frac{t}{\sigma}\right)^2}$$

8.15 根据看跌期权—看涨期权平价，对$t=0$，有

$$P^{\mathrm{E}}(0)=C^{\mathrm{E}}(0)-S(0)+X\mathrm{e}^{-rT}$$
$$=S(0)(N(d_1)-1)-X\mathrm{e}^{-rT}(N(d_2)-1)$$
$$=-S(0)N(-d_1)+X\mathrm{e}^{-rT}N(-d_2)$$

现在，用t代替0，$T-t$代替T，我们就可以得到$P^{\mathrm{E}}(t)$的布莱克-斯科尔斯公式。

第9章

9.1 根据看跌期权—看涨期权平价公式（7.1），有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S}P^{\mathrm{E}}(S)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S}C^{\mathrm{E}}(S)-1=N(d_1)-1$$
$$=-(1-N(d_1))=-N(-d_1)$$

其中d_1由式（8.9）给出，看跌期权的德尔塔是负的，与标的资产价格增加时看跌期权价值减小的事实一致。

9.2 我们最大化$581.96\times S-30\ 779.62-1\ 000\times C^{\mathrm{E}}\left(S,\frac{1}{365}\right)$，其中$S$为1天以后的股票价格；$C^{\mathrm{E}}(S,t)$为看涨期权在时间$t$的价格，$t$在这里为1天，还有89天到期；$\sigma=30\%$，$r=8\%$。对$S$的导数等于零时，我们认为，1天以后期权的德尔塔和0天的德尔塔是相同的。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S}C^{\mathrm{E}}\left(S,\frac{1}{365}\right)=0.581\ 96$。这样就得出了股票的价格满足的条件，即

$$\frac{\ln\frac{S}{60}+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\times\frac{89}{365}}{\sigma\sqrt{\frac{89}{365}}}=\frac{\ln\frac{60}{60}+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\times\frac{90}{365}}{\sigma\sqrt{\frac{90}{365}}}$$

解得 $S \cong 60.0104$ 美元。

9.3 一份看跌期权的期权价格为 0.031 648 美元（根据布莱克-斯科尔斯公式），于是银行卖出 50 000 份看跌期权将得到 1 582.40 美元。看跌期权的德尔塔是 $-0.355\ 300$，于是德尔塔套期保值组合需要卖空 17 765.00股，得到 32 332.29 美元。按 5%利率投资，这样总共可以得到 33 914.69 美元。由卖空股票、投资现金、卖空期权构成的风险中性资产组合的价值为$-32\ 332.29+33\ 914.69-1\ 582.40=0.00$ 美元。

296

1 天以后，卖空股票的价值为 $17\ 765\times1.81=32\ 154.64$ 美元；现金投资增长到 $33\ 914.69e^{\frac{0.05}{365}}\cong 33\ 919.34$ 美元；看跌期权的价值增长到 0.035 182。于是，50 000 份看跌期权的价值为 1 759.11 美元，德尔塔风险中性资产组合的价值为 $-32\ 154.64+33\ 919.34-1\ 759.11\cong 5.59$ 美元。

9.4 1 天以后 1 份看跌期权现在的价格为 0.038 885 美元。因此，50 000 份看跌期权的价值为 1 944.26 美元，股票和现金头寸与习题 9.3 解答中的相同。德尔塔风险中性资产组合将产生 179.56 美元的损失。

9.5 如果股票价格不变，即 $S(t)=S(0)=S$，那么时间 t 以后资产组合的价值为

$$V(t)=SN(d_1)-Xe^{rT}e^{-rT}N(d_2)-C^E(S,t)$$

式中，$C^E(S,t)$由布莱克-斯科尔斯公式给出，d_1 和 d_2 由式（8.9）给出，则

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(t)\Big|_{t=0}&=-rXe^{-rT}N(d_2)-\frac{d}{dt}C^E(S,t)\Big|_{t=0}\\&=-rXe^{-rT}N(d_2)-\text{theta}_{C^E}\\&=\frac{\sigma S}{2\sqrt{2\pi T}}e^{\frac{-d_1^2}{2}}\end{aligned}$$

之值为正。

9.6 利用看跌期权—看涨期权平价和看涨期权的 Greek 参数，我们可以计算看跌期权的以下参数：

$$\begin{aligned}&\text{delta}_{P^E}=N(d_1)-1=\text{delta}_{C^E}-1=-N(-d_1)\\&\text{gamma}_{P^E}=\text{gamma}_{C^E}\\&\text{theta}_{P^E}=-\frac{S\sigma}{2\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}+rXe^{-rT}N(-d_2)\\&\text{vega}_{P^E}=\text{vega}_{C^E}\\&\text{rho}_{P^E}=-TXe^{-rT}N(-d_2)\end{aligned}$$

（这些 Greek 参数是在 $t=0$ 计算的。）这些等式也可用看跌期权价格的布莱克-斯科尔斯公式直接求导证明。

9.7 原来期权的 rho = 7.587 8，另一个期权的 delta = 0.410 4，rho = 7.184 4。delta-rho 风险中性资产组合需要买入大约 148.48 股股票和 1 056.14 份另外的期权，同时借款 7 693.22 美元。1 天以后的头寸如下表所示，表中还重新列出了 delta 套期保值结果。

$S\left(\frac{1}{365}\right)$	delta-rho			delta
	$r=8\%$	$r=9\%$	$r=15\%$	$r=9\%$
58.00	−7.30	−9.65	−26.14	−133.72
58.50	−2.71	−4.63	−17.95	−97.22
59.00	0.18	−1.23	−10.93	−72.19
59.50	1.59	0.77	−4.85	−58.50
60.00	1.76	1.60	0.52	−55.96
60.50	0.92	1.50	5.45	−64.38
61.00	−0.68	0.72	10.16	−83.51
61.50	−2.78	−0.47	14.90	−113.07
62.00	−5.13	−1.84	19.91	−152.78

297

9.8 以 95%的概率，汇率的对数收益率满足 $k>m+x\sigma\cong-23.68\%$，其中 $x\cong-1.645$，因此，$N(x)\cong5\%$。兑换成欧元的 1 000 美元以利率 r_{EUR}进行无风险投资，1 年以后再换回美元，将得到 $1\,000e^{r_{EUR}}e^{k}$ 美元。以 95%的概率满足

$$1\,000e^{r_{EUR}}e^{k}>1\,000e^{r_{EUR}}e^{m+x\sigma}\cong821.40\text{（美元）}$$

另一方面，1 000 美元以利率 r_{USD}进行投资，将增长为 $1\,000e^{r_{USD}}\cong$ 1 051.27美元，因此 $\text{VaR}=1\,000e^{r_{USD}}-1\,000e^{r_{EUR}}e^{m+x\sigma}\cong229.88$ 美元。

9.9 1 份看涨期权的成本为 21.634 美元。我们购买大约 46.22 份期权。股票价格低于 49.47 美元的概率为 5%。在等于 49.47 美元的情况下，我们可以施权，变现 450.18 美元。而利率为 8%的 1 000 美元的无风险资产将增长为 1 040.81 美元。所以 VaR≅590.63 美元。如果股票以预期的增长率增长，达到 63.71 美元，那么在期权被施权时，我们得到 1 095.88美元。以 5%的概率股票价格超过 81.6 美元，那么期权的价值至少为 1 922.75 美元。

9.10 一个牛市差价期权的成本为 0.858 5 美元；期望收益为 29.652 3%；标准差为 99.169%；VaR 为 15 094.74 美元（以 74.03%的置信水平）。如果将 92.945 6%的资本进行无风险投资，剩余的资本投资于牛市差价期权，则期望收益与股票是相同的，风险为 6.995 8%，VaR 为 1 064.85 美元。

9.11 一个施权价为 56 美元的看跌期权的成本为 0.426 0 美元。一

个施权价为 58 美元的看跌期权的成本为 0.928 2 美元。熊市差价期权的期望收益是 111.463 5%，风险达到 174.233 4%。最坏的状况（在可考虑的状况之中的）是股票价格下降到 58.59 美元。在这种状况下（发生的条件概率为 0.390 1），投资者将损失一切，于是 VaR = 15 094.74 美元，以 60.99%的置信水平（包括失去无风险投资机会的成本）。

第 10 章

10.1 收益率为 $y(0)\cong 14.08\%$，$y(3)\cong 13.63\%$。因此 $B(0,3)=e^{-3\tau y(0)}\cong 0.9654$ 美元。如下的策略可实现套利：

● 在时间 0，以 $B(0,6)\cong 0.9320$ 美元价格买入 6 个月的债券，所用的资金利用以 $B(0,3)\cong 0.9654$ 美元的价格发行 0.965 4 份 3 个月债券筹集。

● 在时间 3（3 个月以后），发行 0.998 9 份 3 个月的债券，以 $B(3,6)\cong 0.9665$ 美元的价格卖出，利用贷款 0.965 4 美元结算在时间 0 发行的 3 个月债券。

● 在时间 6（半年以后），在时间 0 包销的 6 个月的债券将支付 1 美元，结算在时间 3 发行的 3 个月债券。

余额 0.001 1 美元是套利利润。

10.2 隐含的利率 $y(0)\cong 12.38\%$，$y(6)\cong 13.06\%$，投资 100 美元，现在可以买 106.38 份债券，6 个月以后可买 113.56 份。1 年的对数收益率 $\ln\left(\frac{113.56}{100}\right)\cong 12.72\%$，它是半年收益率的算术平均。

298

10.3 为达到 14%的收益率，我们以价格 $0.8700e^{14\%}\cong 1.0007$ 美元卖出债券，但这是不可能的（零息债券的价格永远不可能高于面值）。

一般说来，我们需要解方程 $B(0,12)e^{k}=e^{-\tau y(6)}$ 计算出 $y(6)$，这里，k 为对数收益率，左边必小于 1。

10.4 在第一个 6 个月期间的收益率 $y(n)\cong 8.34\%$，当 $n=0,1,\cdots,179$时；在这年的余下的时间 $y(n)\cong 10.34\%$，当 $n=180,\cdots,360$ 时。债券应该以 $0.92e^{4.88\%}\cong 0.9660$ 美元或者更高的价格卖出。在第一个 6 个月期间不可能达到这个价格，因为在收益率改变之前，最高的价格是 $B(179,360)\cong 0.9589$ 美元。在收益率改变的当天，$B(180,360)\cong 0.9496$ 美元。我们一直要等到 $n=240$ 天，当债券的价格第一次超过 0.966 0 美元时。

10.5 利用 Excel 软件中的单变量求解方法解方程

$$10.896\times(10+10e^{-y(1)}+10e^{-2y(1)}+110e^{-3y(1)})=1\,000e^{k}$$

得到：(a) 当 $k=12\%$时，$y(1)\cong 12.00\%$；(b) 当 $k=10\%$时，$y(1)\cong 12.81\%$；(c) 当 $k=14\%$时，$y(1)\cong 11.19\%$。

10.6 利用 Excel 软件可以得到比小数点后保留 2 位小数更精确的数值。

10.7 状况 1：1 427.10 美元；状况 2：1 439.69 美元。

10.8 应用式（10.2），可以直接计算出 $D\cong 1.684\,6$。

10.9 如果面值为 73.79 美元，则久期等于 4 年；最小的可能的久期对应于面值 $F=0$ 美元，此时久期大约为 2.80 年。如果面值 F 变高，则久期接近于 5 年；当 F 趋向无穷大时，久期趋向于 5 年。

当 $F=100$ 美元，息票价值 $C\cong 13.52$ 美元时，久期为 4 年。如果息票价值为零，则久期为 5 年。当息票价值 C 变高，趋向于无穷大时，久期大约为 2.80 年。

10.10 因为 $P(y)$ 的二阶导数是正的，即

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}P(y)=(\tau n_1)^2C_1\mathrm{e}^{-\tau n_1 y}+(\tau n_2)^2C_2\mathrm{e}^{-\tau n_2 y}+\cdots+(\tau n_N)^2(C_N+F)\mathrm{e}^{-\tau n_N y}>0$$

所以 P 为 y 的凸函数。

10.11 解方程组 $6=2w_A+3.4w_B$，$w_A+w_B=1$，我们有 $w_A\cong -1.857\,1$，$w_B\cong 2.857\,1$。因此，我们投资 14 285.71 美元买入14 005.60份债券 B；不足的 9 285.71 美元利用发行 9 475.22 份债券 A 筹集。

10.12 附息债券 A 的收益率大约为 13.37%，于是，零息债券 B 的价格为 87.48 美元。附息债券的久期为 3.29 年，我们计算得到的权重为 $w_A\cong 0.436\,6$，$w_B\cong 0.563\,4$。这意味着，我们投资 436.59 美元买入 4.280 2 份债券 A；投资 563.41 美元买入 6.440 3 份债券 B。

10.13 直接由久期的定义式（10.2）计算在时间 t 的久期 D_t（注意，债券按因子 e^{yt} 增长），即

299

$$\begin{aligned}D_t&=\frac{1}{\mathrm{e}^{yt}P(y)}((\tau n_1-t)C_1\mathrm{e}^{-y(\tau n_1-t)}+\cdots\\&\quad+(\tau n_N-t)(C_N+F)\mathrm{e}^{-y(\tau n_N-t)})\\&=\frac{1}{P(y)}((\tau n_1-t)C_1\mathrm{e}^{-\tau n_1 y}+\cdots+(\tau n_N-t)(C_N+F)\mathrm{e}^{-\tau n_N y})\\&=D_0-t\end{aligned}$$

因为权重$\frac{C_1\mathrm{e}^{-\tau n_1 y}}{P(y)}$，$\frac{C_2\mathrm{e}^{-\tau n_2 y}}{P(y)}$，…，$\frac{(C_N+F)\mathrm{e}^{-\tau n_N y}}{P(y)}$之和等于 1。

10.14 用 C_1 和 C_2 表示年支付的息票，用 F 表示面值，因此，有

$$P(y)=C_1\mathrm{e}^{-y}+(C_2+F)\mathrm{e}^{-2y}$$

$$D(y)=\frac{C_1 e^{-y}+2(C_2+F)e^{-2y}}{P(y)}$$

计算 $D(y)$ 的导数可知它为负，即

$$\frac{d}{dy}D(y)=\frac{-C_1(C_2+F)e^{-3y}}{P(y)^2}<0$$

10.15 首先我们计算债券的价格和久期：$P_A(y)\cong 120.72$，$P_B(y)\cong 434.95$，$D_A(y)\cong 1.8471$，$D_B(y)\cong 1.9894$。权重 $w_A\cong -7.46\%$，$w_B\cong 107.46\%$时，得到久期为 2 年，这意味着，我们需要买入 49.41 份债券 B 和发行 12.35 份债券 A。一年以后，我们可以得到债券 B 的息票收入 247.50 美元，并将这个金额用于支付债券 A 的息票。最终的金额为 23 470.22 美元，等于以利率 8%计算的终值，与利率的变化无关。

10.16 如果期限结构是平坦的，则将收益率 $y(0, 6)$应用于其他期限，于是有 $B(0, 3)=0.9798$ 美元，$B(0, 9)=0.9406$ 美元。

10.17 发行并卖出 500 份 6 个月到期，面值为 100 美元的债券，得到 48 522.28 美元。用这个金额购买 520.405 4 份 1 年期债券；6 个月以后支付 50 000 美元结算已发行的债券；1 年以后变现购买的债券的面值。结果，利率为 8%。

10.18 你需要储蓄 $100\,000e^{-\frac{8.41\%}{12}}\cong 99\,301.62$ 美元 1 个月，它将增长为 100 000 美元的水平，以同样的金额借款 6 个月，利率为 9.54%。1 个月以后你的客户收到 100 000 美元；6 个月以后需要支付 $99\,301.62e^{\frac{9.54\%}{2}}\cong$ 104 153.09 美元，这暗含远期利率为 9.77%（这个利率可以直接从式(10.5）得到）。2 个月后开始的 4 个月贷款的利率为

$$f(0, 2, 6)=\frac{6\times 9.35\%-2\times 8.64\%}{4}\cong 10.09\%$$

于是，以利率 10.23%存款，将存在套利机会。

10.19 为证明远期利率 $f(n, N)$可以为负，为简单起见，我们分析 $n=0$ 的情况。则

300

$$f(0, N)=(N+1)y(0, N+1)-Ny(0, N)$$

并且，为使得 $f(0, N)<0$，要求$(N+1)y(0, N+1)<Ny(0, N)$。临界的情况是 $y(0, N+1)=\frac{N}{N+1}y(0, N)$，这样我们可以找出数值的例子。例如，对于 $N=8$，$y(0, 8)=9\%$，如果 $y(0, 9)<\frac{8}{9}\times 9\%=8\%$，就可以得到负的 $f(0, 8)$。

10.20 假设 $f(n, N)$随 N 增加，我们想证明

$$y(n, N)=\frac{f(n, n)+f(n, n+1)+\cdots+f(n, N-1)}{N-n}$$

也随 N 增加。这可由如果序列 a_n 是递增的，那么序列的平均值 $S_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 也是递增的得出。如果要证明不等式 $S_{n+1}>S_n$，我们可以用$n(n+1)$乘不等式，（消去一些次后）就可以得到 $na_{n+1}>a_1+\cdots+a_n$。后者是正确的，因为 $a_{n+1}>a_i$ 对所有的 $i=1, 2, \cdots, n$ 成立，所以 $S_{n+1}>S_n$。

10.21 价值 $B(0, 2)$，$B(0, 3)$，$B(1, 3)$对货币市场账户没有影响。

10.22 (a) 对于在零息债券上的 100 美元投资，用初始现金除以债券价格 $B(0, 3)$就可以得到持有债券的数量 102.82，最终财富为 102.82 美元。对数收益率是 2.78%。(b) 对于在单期零息债券上的投资，计算出时间 1 到期的债券数量$\frac{100}{B(0, 1)}\cong 100.99$。在时间 1，用类似的方法可以计算出在时间 2 到期的债券数量为$\frac{100.99}{B(1, 2)}\cong 101.54$。最后，债券的数量为 $\frac{101.54}{B(2, 3)}\cong 102.51$，在时间 3，每个债券为 1 元。对数收益率为 2.48%。(c) 投资 100 美元于货币市场账户，在时间 3 我们可以得到 $100A(3)=102.51$ 美元，对数收益率与 (b) 相同。

第 11 章

11.1 我们从右端开始，即从债券的面值开始，首先计算在多种状态下的 $B(2, 3)$的价值。这些数与已知的收益率一起就可以得到 $B(1, 3; \mathrm{u})$和 $B(1, 3; \mathrm{d})$。反过来，这些数可以确定收益率 $k(2, 3; \mathrm{ud})=0.20\%$，$k(2, 3; \mathrm{dd})=0.16\%$。对第一个时期也这样做，就可以得到 $k(1, 3; \mathrm{d})=0.23\%$。债券价格如图 S—10 所示。

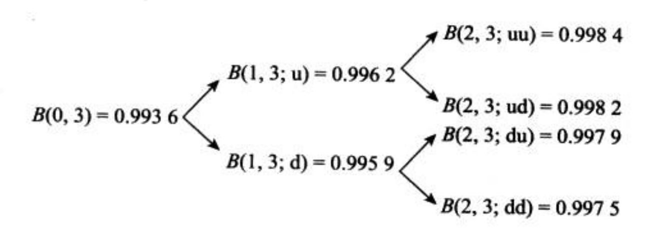


图 S—10　习题 11.1 解答中的债券价格

11.2 由对数收益率的可加性，$k(1, 3; \mathrm{u})+k(2, 3; \mathrm{uu})+k(3, 3; \mathrm{uuu})=0.64\%$得到三个星期的收益率。为计算收益率我们必须乘以$\frac{52}{3}$以转换成整年收益率，所以 $y(0, 3)=11.09\%$。注意，必有 $k(1, 3; \mathrm{u})+$

$k(2, 3; ud)+k(3, 3; udu)=0.64\%$，利用这个数可以计算出 $k(2, 3; ud)=0.20\%$。用类似的方法首先计算出 $k(1, 3; d)$，然后计算出 $k(2, 3; dd)$，就可以计算出需要的收益率。

301

11.3 债券的价格在图 S—11 中给定

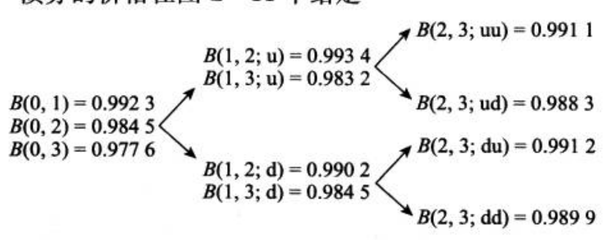


图 S—11 习题 11.3 解答中的债券价格

11.4 货币市场账户在图 S—12 中给出。注意“上升”变动的价值低于“下跌”变动的价值。这与股票价格上升收益率下降相关，价格树基于债券价格变动。

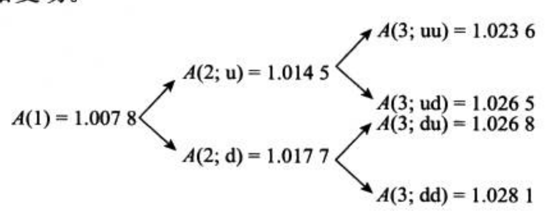


图 S—12 习题 11.4 解答中的货币市场账户

11.5 价格 $B(1, 2; u)=0.998\,0$ 和 $B(1, 2; d)=0.997\,5$ 是在时间 2 收到的面值 1 利用短期利率 $r(1; u)$和 $r(1; d)$折现得到的。重复使用上述方法就可以计算出 $B(0, 2)=0.994\,4$。

11.6 在时间 2，息票为 0.522 7 或 0.877 8，取决于在时间 1 是上涨状态还是下跌状态。在时间 1 息票为 0.999 9。

11.7 在时间 1，在上涨状态我们可以计算出 $18.064\,7=\dfrac{0.815\,9\times20+0.184\,1\times10}{1.005\,2}$；在下跌状态我们可以计算出 $1.795\,1=\dfrac{0.181\,1\times10+0.184\,1\times0}{1.008\,8}$。接下来，用同样的公式我们可以计算出，$7.918\,8=\dfrac{0.381\,3\times18.392\,8+0.618\,7\times1.795\,1}{1.01}$。

11.8 在时间 1，在上涨状态存在套利机会。价格 $B(1, 2; u)$暗含货币市场的增长因子为 1.007 66，而在时间 3 到期的债券的价格暗含增长因子为 1.011 59 和 1.007 38。为实现套利，我们可以利用在货币市场贷款融资买入在时间 3 到期的债券。

302

11.9 利用式（11.5）和给定的短期利率，我们可以计算出以下的

债券价格树结构，即

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & B(2,3;\mathrm{uu})=0.9931 \\
 & & B(1,3;\mathrm{u})=0.9859 & < & \\
 & / & & & B(2,3;\mathrm{ud})=0.9926 \\
B(0,3)=0.9773 & & & & B(2,3;\mathrm{du})=0.9924 \\
 & \backslash & B(1,3;\mathrm{d})=0.9843 & < & \\
 & & & & B(2,3;\mathrm{dd})=0.9923
\end{array}
$$

11.10 最好是计算风险中性概率。时间 3 到期的债券在时间 1 价格向上变动的概率为 0.76，而在时间 2 到期的债券相应的概率为 0.61。利用在时间 3 到期的债券的价格计算在时间 2 到期的债券的现价并且从这些价格计算的风险中性概率为 0.986 7。于是，在时间 0 做空在时间 3 到期的债券并且买入在时间 2 到期的债券将得到套利利润。

11.11 在时间 2，期权无价值。在时间 1，我们可以利用息票加上最终支付的折现值 101.00 估计债券价格，其折现利率为（按月的）货币市场利率，在上涨状态为 0.521%；在下跌状态为 0.874%。结果分别为 101.474 8 和 101.121 3。期权在上涨状态可以施权，于是现金流分别为 0.174 8 和 0。折现的现金流对风险中性的期望给出期权的初始价值为 0.065 98。

11.12 具有下限条款的债券息票不同于在时间 2 的上涨状态价格上限，是 0.668 98 而不是 0.522 72。得到在时间 1 的如下的价格：在上涨状态为 101.145 31；在下跌状态为 100.999 9。对风险中性概率的期望得出债券的初始价格 100.054 89，于是，利率下限为 0.054 89。

参考文献

背景阅读：概率和随机过程

Ash, R. B. (1970), *Basic Probability Theory*, John Wiley & Sons, New York.

Brzeïniak, Z. and Zastawniak, T. (1999), *Basic Stochastic Processes*, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer-Verlag, London.

Capiński, M. and Kopp, P. E. (1999), *Measure, Integral and Probability*, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer-Verlag, London.

Capiński, M. and Zastawniak, T. (2001), *Probability Through Problems*, Springer-Verlag, New York.

Chung, K. L. (1974), *A Course in Probability Theory*, Academic Press, New York.

Stirzaker, D. (1999), *Probability and Random Variables. A Beginner's Guide*, Cambridge University Press, Cambridge.

背景阅读：微积分和线性代数

Blyth, T. S. and Robertson, E. F. (1998), *Basic Linear Algebra*, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer-Verlag, London.

Jordan, D. W. and Smith, P. (2002), *Mathematical Techniques*, Oxford

University Press, Oxford.
Stewart, J. (1999), *Calculus*, Brooks Cole, Pacific Grove, Calif.

延伸阅读：数理金融

Baxter, M. W. and Rennie, A. J. O. (1996), *Financial Calculus*, Cambridge University Press, Cambridge.

Benninga, S. and Czaczkes, B. (1997), *Financial Modeling*, MIT Press, Cambridge, Mass.

Bingham, N. H. and Kiesel, R. (1998), *Risk-Neutral Valuation: Pricing and Hedging of Financial Derivatives*, Springer-Verlag, Berlin.

Björk, T. (1998), *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press, Oxford.

Chen, L. (1996), *Interest Rate Dynamics, Derivatives Pricing, and Risk Management*, Lecture Notes in Econom. and Math. Systems 435, Springer-Verlag, New York.

Elliott, R. J. and Kopp, P. E. (1998), *Mathematics of Financial Markets*, Springer-Verlag, New York.

Elton, E. J. and Gruber, M. J. (1995), *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, John Wiley & Sons, New York.

Etheridge, A. (2002), *A Course in Financial Calculus*, Cambridge University Press, Cambridge.

Haugen, R. A. (1993), *Modern Investment Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J.

Hull, J. (2000), *Options, Futures and Other Derivatives*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J.

Jarrow, R. A. (1995), *Modelling Fixed Income Securities and Interest Rate Options*, McGraw-Hill, New York.

Jarrow, R. A. and Turnbull, S. M., *Derivative Securities*, South-Western College, Cincinnati, Ohio.

Karatzas, I. and Shreve, S. (1998), *Methods of Mathematical Finance*, Springer-Verlag, Berlin.

Korn, R. (1997), *Optimal Portfolios*, World Scientific, Singapore.

Lamberton, D. and Lapeyre, B. (1996), *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman and Hall, London.

Musiela, M. and Rutkowski, M. (1997), *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer-Verlag, Berlin.

Pliska, S. R. (1997), *Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models*, Blackwell, Maldon, Mass.

Wilmott, P. (2001), *Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance*, John Wiley & Sons, Chichester.

Wilmott, P., Howison, S. and Dewynne, J. (1995), *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge.

专业符号表

符号	含义
A	固定收入（无风险）证券价格；货币市场账户
B	债券价格
β	贝塔（beta）因子
c	协方差
C	看涨期权价格；息票价值
$\mathbf{C}$	协方差矩阵
C^{A}	美式看涨期权价值
C^{E}	欧式看涨期权价值
$\widetilde{C}^{E}$	折现欧式看涨期权价格
Cov	协方差
delta	用希腊字母表示的参数 delta（德尔塔）
div	红利
div_0	红利现值
D	衍生证券价格；久期
$\widetilde{D}$	衍生证券折现价格
D^{A}	美式衍生证券价格
E	期望（值）
E_*	风险中性期望（值）
f	期货价格；期权回报；远期利率
F	远期价格；终值；面值
gamma	用希腊字母表示的参数 gamma（伽马）

Φ	累积二项分布
k	对数收益率
K	收益率或者收益
i	付息率
m	复合频率；期望对数收益
M	市场资产组合
$\boldsymbol{m}$	作为一行矩阵的期望收益
μ	期望收益
N	累积正态分布
$\binom{N}{k}$	从 N 个元素中取出 k 个元素
ω	状况
Ω	概率空间
p	二叉树模型中的分支概率
p_*	风险中性概率
P	看跌期权价格；本金
P^{A}	美式看跌期权价格
P^{E}	欧式看跌期权价格
$\widetilde{P}^{E}$	欧式看跌期权折现价格
PA	年金的现值因子
r	利率
r_{div}	红利收益率
r_e	有效利率
r_F	无风险收益率
rho	用希腊字母表示的参数 rho（诺）
ρ	相关系数
S	风险证券（股票）价格
$\widetilde{S}$	风险证券（股票）折现价格
σ	标准差；风险；波动率
t	当前时间
T	到期时间；终止时间；施权时间；交割时间
τ	时段
theta	用希腊字母表示的参数 theta（西塔）
$\boldsymbol{u}$	所有元素为 1 的行矩阵
V	资产组合价值；远期合约价值；期货合约价值
Var	方差
VaR	风险价值
vega	用希腊字母表示的参数 vega（维伽）

w	对称随机漫步；资产组合权重
$\mathbf{w}$	作为一行矩阵的资产组合权重
W	维纳过程；布朗运动
x	风险证券头寸
X	施权价
y	固定收入（无风险）证券头寸；债券收益率
z	衍生证券头寸

索　引*

* 索引页码为英文原书页码，见本书每页边上的标码。——译者注

[General Information]
书名=金融数学金融工程引论
作者=（美）马雷克·凯宾斯基，托马什·扎斯特温尼克著
页数=285
出版社=北京市：中国人民大学出版社
出版日期=2009.01
SS号=12183266
DX号=000006692599
URL=http://book.szdnet.org.cn/bookDetail.jsp?dxNumber=000006692599&d=C216B34820740AB4504CF61C466E59C7